



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.





,

.

102000

Y

Übersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXI

Jahrgang 1891.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

*Öffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur
Feier des 132. Stiftungstages am 21. März 1891.*

Seite

C. v. Voit: Nekrologe 139

*Öffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und
Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1891.*

Wahlen 273

Sitzung vom 3. Januar 1891.

Ad. Steinheil: Erläuterungen zu dem Handbuch der ange- wandten Optik von Ad. Steinheil und E. Voit (Theil I)	1
G. Recknagel: Zur Hygiene der Wohnung	5
W. Dyck: Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. (Mit Tafel I—IV) .	23

Sitzung vom 7. Februar 1891.

C. L. Weber: Zur Messung der magnetischen Inklination . .	59
*A. Voss: Ueber spezielle Differentialinvarianten in der Flächen- theorie	59

Sitzung vom 7. März 1891.

C. W. v. Gümbel: Geologische Bemerkungen über die Thermen von Bormio und das Ortlergebirge	79
---	----

	Seite
N. Rüdinger: Ueber die Umbildung der Lieberkühn'schen Drüsen durch die Solitärfollikel im Wurmfortsatz des Menschen. (Mit Tafel V)	121

Sitzung vom 2. Mai 1891.

E. Lommel: Ueber die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes	151
*S. Finsterwalder: Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder, auf Grund der Seidel'schen Formeln untersucht	180

Sitzung vom 6. Juni 1891.

*C. v. Voit: Ueber die Glykogenbildung nach Aufnahme verschiedener Zuckerarten	189
--	-----

Sitzung vom 4. Juli 1891.

*Ed. Frhr. v. Haerdtl: Skizzen zu einem speziellen Fall des Problems der drei Körper	189
F. v. Sandberger: Ueber den Erzgang der Grube Sagra Familia in Costarica und dessen Bedeutung für die Theorie der Erzgänge	191
A. Brill: Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle	207

Sitzung vom 7. November 1891.

H. Seeliger: Notiz über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre	239
H. Seeliger: Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre	247

Sitzung vom 5. Dezember 1891.

Leo Königsberger: Ueber die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme	275
*W. v. Gümbel: Geognostische Beschreibung von Bayern (Fränkischer Jura). Vierte Abhandlung	274
F. v. Sandberger: Ueber die Erzgänge der Gegend von Freudenstadt und Bulach im württembergischen Schwarzwald . .	281
Einsendungen von Druckschriften	221, 319

Sitzungsberichte
der
königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

— — —
Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. Januar 1891.

1. Herr AD. STEINHEIL überreicht der Classe sein mit Herrn Professor Dr. ERNST VOIT herausgegebenes „Handbuch der angewandten Optik“ (Theil I) und knüpft daran einige Erläuterungen.

2. Herr M. v. PETTENKOFER legt eine Abhandlung des correspondierenden Mitgliedes der Classe, Herrn Professor Dr. GEORG RECKNAGEL in Passau „über Bestimmung und Berechnung des Luftwechsels in Wohnräumen“ vor.

3. Herr WALTHER DYCK hält einen Vortrag: „über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme“.

**Erläuterungen zu dem Handbuch der angewandten
Optik von Ad. Steinheil und E. Voit.**

Von Ad. Steinheil.

(Eingelassen 8. Januar.)

Das Handbuch der angewandten Optik soll ein Hilfsbuch für den ausführenden Optiker sein, dem zu seinen Arbeiten bislang eine zusammenhängende und die neueren Untersuchungen berücksichtigende Anleitung mangelte. Es darf der Ausspruch Fraunhofer's, dass für den ausübenden Optiker

allein die Dioptrik Klügel's etwas Brauchbares liefere, noch heute als zutreffend bezeichnet werden; obwohl seitdem die Bahn brechenden Arbeiten Fraunhofer's selbst, sodann die eines Bessel, Gauss, Helmholtz, Seidel und anderer erschienen sind. Wir waren bemüht, in dem Handbuche die Resultate dieser Untersuchungen auch demjenigen zugänglich zu machen, der ausgerüstet mit den Hilfsmitteln der Algebra und Trigonometrie sich der Herstellung der optischen Instrumente widmen will.

In den einleitenden Kapiteln geben wir zuerst erprobte Methoden zur Orientirung und numerischen Bestimmung der optischen Eigenschaften der Glassorten.

Sodann stellen wir, auf die analytischen Methoden fussend, die Anschauungen zusammen, welche zur Orientirung über die Eigenschaften der optischen Systeme sowie über die von den Bildern zu erfüllenden Bedingungen dienen.

Hierbei unterlassen wir es, auf eine strenge mathematische Beweisführung einzugehen, indem wir es dem hiefür sich Interessirenden überlassen, in der einschlägigen Literatur sich Rath zu erholen.

Wir schliessen uns in diesem Theile unseres Buches enge an die von Gauss eingeführten Betrachtungen an, nur in einem wesentlichen Punkte weichen wir ab, beziehungsweise erweitern wir die Gauss'sche Theorie.

Gauss und alle Nachfolger desselben nehmen an, dass bei einem idealen optischen Systeme, die Anfangspunkte der Brennweiten für verschiedene Oeffnungen in einer zur Axe des Systemes senkrechten Ebene (der Hauptebene) liegen. Nach dieser Annahme ist die Brennweite bei grösserer Oeffnung länger als die bei kleinerer; wenn man dagegen die von dem Brennpunkte aus mit dem Radius gleich der wahren Brennweite gezogene Sphäre als Ort der Anfangspunkte der Brennweiten (als Hauptsphäre) betrachtet, erhalten alle Brennweiten des idealen Systemes gleichen numerischen Werth.

Aus den späteren Kapiteln des Buches heben wir die, nach der oben erwähnten trigonometrischen Rechnungsmethode hergestellten Tabellen hervor.

Die erste Tabelle liefert für Linsen von gleicher Brennweite den Einfluss der Oeffnung; und dann für Linsen von gleicher Brennweite und Oeffnung den Einfluss der Linsenform, der Glassorte und der Linsendicke auf die übrig bleibenden Fehler im Bilde von Objectpunkten in und seitlich von der Axe.

Die zweite Tabelle ist von grösserer Bedeutung; für diese sind Doppellinsen gerechnet, alle von gleicher Oeffnung und Brennweite, sowie frei von Farben- und Kugelgestaltfehlern; und es ergaben sich die bei verschiedenen Linsenformen übrig bleibenden Fehler in Bezug auf Verzerrung, Farbenvergrösserung und Kugelgestaltfehler für eine zweite Farbe.

In einer späteren Auflage hoffen wir, diese, langwierige Rechnungen bedingende Tabelle dahin erweitern zu können, dass auch der Einfluss der Glassorten, sowie der der Linsendicken und Abstände hervortritt.

mir bereits früher begründeten theoretischen Rechnungen,¹⁾ durch welche der Luftwechsel annähernd auch für diejenigen Fälle ermittelt wird, in denen jene Umstände nicht mehr die gleichen sind. Es wird auf Grundlage einer solchen Messung und Beschreibung möglich sein, für jede Jahres- und Tageszeit anzugeben, welche Leistung ungefähr man von der Porenventilation und welche man von einer bestimmten ebenfalls nur auf Temperaturunterschiede und Winddruck begründeten Lüftungsanlage zu erwarten hat.

2. Am einfachsten wird die Messung des Gesamtluftwechsels mittelst der von Pettenkofer begründeten Methode der Kohlensäurebestimmungen ausgeführt. Die Anwendung dieser Methode hat bereits zu schönen Erfolgen geführt. Seit mittelst derselben nach dem Vorgange Pettenkofer's Breiting, Rietschel u. A. zahlreiche und systematische Untersuchungen über die Steigerung des Kohlensäuregehaltes der Schulluft ausgeführt haben, wird kaum noch ein neues Schulhaus gebaut, ohne dass eine besondere Lüftungseinrichtung vorgesehen würde. Demnach ist zu hoffen, dass auch der Privatwohnung Heil widerfahren wird, wenn man sich in den massgebenden Kreisen der Aerzte, Miether, Bauherren und Architekten gründlich und zahlenmässig überzeugt hat, wieweit das, was wir zur Zeit in unseren Wohn- und Schlafzimmern an Luftwechsel besitzen, den grössten Theil des Jahres hindurch hinter den unerlässlichen Forderungen der Hygiene zurückbleibt. —

Die bis jetzt allerdings noch wenig zahlreichen Versuche, welche ich in Gemeinschaft mit Herrn Lycealprofessor Dr. Putz ausgeführt habe, gaben Veranlassung, die Methode einer etwas eingehenderen Prüfung zu unterziehen. Dabei schien uns der chemische Theil des Verfahrens — Barytwasser mit Oxalsäure titirt, Phenolphthalein oder Rosolsäure als Indicator — hinreichend einfach und genau; die Rechnung

1) Sitzungsberichte vom 6. Juli 1878 u. 6. Dezember 1879.

II.

Für den Fall, dass während der Zwischenzeit zwischen den beiden Kohlensäurebestimmungen in dem Versuchsraume selbst Kohlensäure nur auf Kosten des in der Luft des Raumes enthaltenen Sauerstoffs producirt wird — wie z. B. bei der Athmung von Menschen, welche sich im Sauerstoffgleichgewicht befinden — gibt, wie schon Jacoby l. c. nachgewiesen hat, die Formel von Hagenbach¹⁾ den Zusammenhang zwischen dem Kohlensäuregehalt c (pro mille) der zugeführten freien Luft,

dem anfänglichen Gehalte c_1 ,

dem schliesslichen Gehalte c_2 der Zimmerluft,

der stündlich im Zimmer selbst producirten Kohlensäuremenge l (Liter),

dem kubischen Inhalte des Zimmers K (Kubikmeter)

der stündlich zugeführten Luftmenge V (Kubikmeter)

und der Zeitdauer des Versuchs t (Stunden).

Die entsprechende Gleichung ist:

$$\frac{c_1 - c - \frac{l}{V}}{c_2 - c - \frac{l}{V}} = e^{\frac{V}{K}t} \dots\dots (1)$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen (2,718...) bedeutet. Die Voraussetzungen, welche dieser Gleichung zu Grunde liegen, sind:

1. Luftwechsel, Kohlensäureproduction, Temperatur des Zimmers und Luftdruck sind konstant.
2. Jeder kleinste Theil der zugeführten Luftmenge so-

1) Mitgetheilt von Dr. Carl Breiting in seinem Berichte an das Sanitätscollegium von Basel-Stadt über: Untersuchungen, betr. den Kohlensäuregehalt der Luft im Schulzimmern, 1870. S. 48 ff.

Die zweite Formel von Seidel setzt voraus, dass im Versuchsraume Kohlensäure producirt wird, für welche das Aequivalent an Sauerstoff nicht aus der Luft genommen wird. Die erste Formel Seidel's setzt eine Kohlensäureproduction im Versuchsraume überhaupt nicht voraus.

(K Kubikmeter). Dieses ζ ist vermöge der verschiedenen Raummaasse, welche für l und K angewendet werden, mit den c gleichartig und derjenige Kohlensäuregehalt (ζ pro mille), um welchen bei Mangel jeder Ventilation der Kohlensäuregehalt des Zimmers in einer Stunde zunehmen würde.¹⁾

Dann erhält die Gleichung die Form:

$$\frac{c_2 - c}{c_1 - c_2} = \frac{\left(\zeta : \frac{V}{K}\right)}{e^{\frac{V}{K}t} - 1},$$

und es kommt die Grösse V , um deren Ermittlung es sich handelt, nur noch in der Verbindung $\frac{V}{K}$ vor. Man kann demnach die Schreibweise vereinfachen, indem man dieses Verhältniss — den relativen Luftwechsel²⁾ — durch ein Zeichen E ausdrückt.

Zugleich soll die rechts stehende Funktion der beiden Grössen E und t künftig mit f bezeichnet werden, so dass nun die Gleichung die folgende Form erhält:

$$\frac{c_2 - c}{c_1 - c_2} = \frac{\zeta : E}{f} \dots \dots \dots (2)$$

wobei $\zeta = \frac{l}{K}$ das Verhältniss der stündlich im Raume ent-

1) Dieselbe Grösse (ζ) ist der reciproke Werth des „Luftkubus“ $\left(\frac{K}{l}\right)$ für 1 Liter stündliche Kohlensäureproduction.

2) Dem relativen Luftwechsel $\frac{V}{K}$ hat der Sprachgebrauch bereits den Namen „Stündliche Lüfterneuerung“ beigelegt, da man, wenn K die Werte 1, 2, 3 . . . hat, zu sagen pflegt, es finde in dem Raume K stündlich einmalige, zweimalige, dreimalige . . . Lüfterneuerung statt. Obwohl diese Benennung nicht streng richtig ist und der falschen Vorstellung, als ob nach vollzogener „Lüfterneuerung“ von der früheren Luft nichts mehr anwesend sei, vorschub leisten könnte, soll sie in ihrer Eigenschaft als alter Bekannter beibehalten werden.

Da während der Beobachtungszeit Kohlensäure im Saale nicht producirt wurde, ist in Gleichung (2

$$\zeta = 0$$

zu setzen. Für c (den Kohlensäuregehalt der zuströmenden Luft) wird der Werth 0,4 angenommen. Somit wird

$$f = \frac{2,93 - 0,4}{3,55 - 2,93} = 4,08.$$

In Tabelle I findet man unter dem Kopfe 30 Minuten den Werth 4,08 angegeben und erhält als entsprechende Lufterneuerung $E = 0,44$. Der stündliche Luftwechsel beträgt somit 0,44 des Rauminhaltes, und da dieser 340 Kubikmeter ist, berechnet sich die stündlich zuströmende der abströmenden gleiche Luftmenge zu $0,44 \cdot 340$ oder 150 Kubikmeter.¹⁾

1) Als Beispiel einer Beschreibung der massgebenden Umstände diene folgendes:

Der Lehrsaal liegt im zweiten Obergeschosse eines frei stehenden Gebäudes und hat zwei freie mit je zwei Fenstern versehene Seitenwände, deren eine von 7,41 m Länge nach Süden, die andere 9,84 m lang, nach Westen gewendet ist. Auf der Nordseite, welche die Thüre enthält, befindet sich ein Vorzimmer, welches durch ein offenes Fenster mit der freien Luft und durch eine offene Thüre mit dem Corridor verkehrt. Auf der Ostseite ist der Saal durch eine glatte Mauer von einem geschlossenen Privatzimmer getrennt.

Die ganze Höhe beträgt 5,64 m, steigt bis zu 3,60 m glatt an und geht sodann in ein vergipstes Spiegelgewölbe über. Oberhalb ist ein luftiger Speicher, unterhalb ein ebenfalls gewölbter Lehrsaal, der vor dem Versuch durch halbstündiges offenstehen lassen aller Fenster und Thüren gelüftet worden war. Der kubische Inhalt wurde zu 340 cbm berechnet. Die innere Temperatur war anfangs 19,4, am Ende 18,4, also im Mittel 18,9° Cels., die der äussern Luft — 4° Cels. Der unterhalb liegende Saal zeigte im Mittel 8° C. Barometerstand 742 mm. Windstille.

Besondere Bemerkungen. Die Fenster schliessen mittelmässig, die Thüre sehr schlecht, die Dohlen zeigen grosse bis zu 1 cm breite Zwischenräume. Im Ofen brennt das Feuer bei offenem Aschenkasten.

f und β gleich gross ausgefallen. Da dieses nicht der Fall ist, muss das Probiren fortgesetzt werden, und es ist der Uebersichtlichkeit wegen nützlich, die drei zusammengehörigen Werthe von E , f und β in ein Täfelchen zusammenzustellen.

$t = 20$ Minuten.

Nr.	E	f	β
1	1.0	2.53	1.03
2	2.0	1.05	1.28
3	1.8	1.22	1.21

Durch Zunahme von E wächst auch der Werth des Bruches β ; hingegen nimmt f ab (wie aus der Tafel ersichtlich). Somit nähern sich in unserem Falle (wo $\beta < f$) die beiden Grössen β und f , wenn man E zunehmen lässt.

Anstatt aber nun in Abtheilung 2 der Tafel wieder einen beliebigen Werth von E zu wählen, scheint es förderlicher, zu erwägen, dass bei wachsendem E das β langsam zunimmt, während f rasch abnimmt. Das weist uns an, nicht E sondern f als willkürlich Veränderliche zu nehmen und seinen Werth ganz nahe an β also etwa auf denjenigen Tafelwerth zu rücken, welcher zunächst oberhalb des der jetzigen Bruchwerthes (1,03) liegt.

Dann kommt man auf $f = 1,05$.

Das entspricht $E = 2,0$ und

$$\frac{1,00}{0,78} = 1,28.$$

Indem man nun nochmals mit f dem β so nahe rückt als es ohne Ueberspringen seines Wertes geschehen kann, erhält man als dritte Partie zusammengehöriger Werthe

$$f = 1,22, \quad E = 1,8, \quad \beta = 1,21.$$

Der Unterschied zwischen f und β ist nun so klein, dass man sich bei $E = 1,8$ beruhigen kann.

Drittes Beispiel. Bei Anwesenheit von zwei Personen in einem Raume von 100 cbm Luftinhalt sank in 30 Minuten der Kohlensäuregehalt von 1,75 auf 1,13 pro mille. Wie gross war der stündliche Luftwechsel?

Es ist beobachtet $c_1 = 1,75$; $c_2 = 1,13$ und angenommen $c = 0,4$; $\zeta = \frac{2 \cdot 20}{100} = 0,4$. Somit ist E aus der Gleichung

$$f = \frac{0,73 - 0,4 : E}{0,62}$$

zu berechnen.

$$t = 30 \text{ Minuten.}$$

Nr.	E	f	β
1	1	1,54	0,53
2	2	0,582	0,855
3	1,6	0,816	0,774
4	1,64	0,785	0,784

Man erhält für die erste willkürliche Annahme $E = 1$ die unter No. 1 eingetragenen Werthe von f und β , und geht nun wie im zweiten Beispiele mit f in Abt. 2 bis zu dem zunächst über ($\beta = 0,53$) liegenden Tafelwerthe 0,582. Dadurch wird $E = 2$ und $\beta = 0,855$. Durch Fortsetzung desselben Verfahrens wird $f = 0,816$; $E = 1,6$; $\beta = 0,774$ erhalten.

Nun ist der Unterschied zwischen f und β kleiner geworden, als die Differenz zweier auf einander folgender Tafelwerthe von f (nämlich 0,816 und 0,746); und daraus folgt zunächst, dass E zwischen 1,6 und 1,7 liegt. Mit diesem

Resultate wird man in den meisten Fällen abschliessen dürfen. Will man aber eine weitere Annäherung erzielen, so kann dieselbe durch Interpolation erfolgen:

Man theilt die noch zwischen f und β bestehende Differenz (0.042) im Verhältnisse der Geschwindigkeiten, mit welchen sich f und β ändern. Diese Geschwindigkeiten entnimmt man aus den Änderungen, welche f und β bei den Uebergängen vom zweiten zum dritten Näherungswerte der E erfahren haben. Es stehen sich in unserem Beispiel $0.816 - 0.682 = 0.234$ für f und $0.855 - 0.774 = 0.081$ für β gegenüber, welche Zahlen sich sehr nahe wie 3:1 verhalten, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher bei einer bestimmten Zunahme von E das β abnimmt, ist nahe dreimal so gross als diejenige, mit welcher der Bruch f wächst. Man hat demnach 0.042 in zwei Theile zu theilen, welche sich nahezu wie 3 zu 1 verhalten. Solche Theile sind 0.031 und 0.011. Lässt man f um 0.031 abnehmen und β um 0.011 wachsen, so erhält man den Werth 0.785, und es ist noch das zu diesen Werthe von f gehörige E zu suchen.

E liegt zwischen 1.6 und 1.7, und die zugehörigen Tafelwerthe von f unterscheiden sich um 0.061, während unser Werth von f von dem oberen derselben um 0.031 abweicht.

Es ist also die Frage zu beantworten: Wie viel Hunderteln entspricht diese Differenz 0.031, wenn 10 Hundertel der Differenz 0.061 entsprechen? Die Antwort gibt der Werth von x in der Proportion

$$0.061 : 10 = 0.031 : x,$$

aus welcher $x = 4$ folgt.

Der letzte Näherungswert von E ist somit 1.64. Setzt man denselben zur Probe in den Bruch ein, so erhält man den Werth $f = 0.785$ hundertstel übereinstimmende Zahl 0.784.

IV.

Als weitere Beispiele können die für unsern Kenntnisse vom natürlichen Luftwechsel fundamentalen Versuche dienen, welche Pettenkofer ¹⁾ in den Monaten März, Oktober und Dezember des Jahres 1857 in seinen Atmestudien angestellt.

¹⁾ In den Pettenkofer'schen Atmestudien (S. 13) sind die Versuche angegeben, die oben S. 10 u. 11.

in einem Zimmer von 76 cbm Luft-
 Dezember des Jahres 1857.



der neu berechneten Pettenkofer'schen V
 inhalt, ausgeführt in den

Die Versuche sind in demselben Zimmer in verschiedenen Jahreszeiten bei verschiedenen Temperaturen angestellt. Die Motoren des Luftwechsels können jedesmal nur zwei gewesen sein: Temperaturdifferenz und Winddruck. Macht man die Hypothese, dass erstere allein wirkte — also die Messungen, wie es nach einer mir durch die Güte des Herrn Autors zugekommenen mündlichen Mittheilung in der That angestrebt wurde, bei Windstille ausgeführt sind — so lassen sich die vier Mittelwerthe (1 — 3), (4 — 8), (9 — 13), (15 — 18) vergleichbar machen, indem man aus jedem derselben den Luftwechsel berechnet, welcher stattgefunden hätte, wenn die äussere Temperatur 0°C. , die innere $+1^{\circ}\text{C.}$ gewesen wäre.

Der durch Temperaturdifferenzen veranlasste Luftwechsel ist, insoferne er nur durch kapillare Wege stattfindet, der Gewichts-differenz zweier Luftsäulen von gleicher Höhe (h) proportional, und zwar, wenn die äussere Temperatur t , die innere T , der Barometerstand B ist, dem Ausdrücke

$$h \cdot 1,293 \frac{B}{760} \left(\frac{1}{1 + \alpha t} - \frac{1}{1 + \alpha T} \right),$$

welcher ersetzt werden kann durch

$$h \cdot 1,293 \frac{B}{760} \frac{T - t}{273 + T + t}.$$

Der Luftwechsel eines Zimmers von constanter Beschaffenheit ist demnach der Temperaturdifferenz nicht streng proportional, sondern auch einigermassen von den Temperaturen selbst beeinflusst.

Für $t = 0$, $T = 1$ erhält man

$$h \cdot 1,293 \frac{B}{760} \cdot \frac{1}{274}.$$

Es stehen somit die Lüfterneuerungen E und E_0 , welche in demselben Raume einerseits bei den allgemeinen Tempe-

raturen (T, t), andererseits bei den besonderen (1° und 0° C.) vor sich gehen, in der Proportion:

$$E : E_0 = \frac{T - t}{273 + T + t} : \frac{1}{274},$$

oder es ist

$$E_0 = \frac{E}{T - t} \cdot \frac{273 + T + t}{274}.$$

Die Vernachlässigung des zweiten Faktors beträgt z. B. bei $T = 24^\circ$, $t = 10^\circ \dots$ 12 Prozent des Werthes von E_0 (der reducirten Lufterneuerung).

Ich habe nun aus den umgerechneten Versuchsergebnissen Pettenkofer's die E_0 berechnet und als Mittelwerthe erhalten:

Für den	7. März	$E_0 = 0,075$	bei	$t = 6^\circ$ C.
„	9. „	$E_0 = 0,061$	„	$t = 0^\circ$ C.
„	20. Okt.	$E_0 = 0,108$	„	$t = 19^\circ$ C.
<hr/>				
Für den	11. Dez.	$E_0 = 0,047$	bei	$t = -1^\circ$ C.

Die reducirten Lufterneuerungen (E), welche unter der Voraussetzung, dass die E in einem Raume von constanter Durchlässigkeit der Begrenzung durch Temperaturdifferenzen allein veranlasst seien, gleich gross ausfallen müssten, weichen demnach erheblich von einander ab.

Dass die Beobachtungen vom 11. Dez. einen kleineren Werth von E_0 liefern, ist selbstverständlich, da sie nach absichtlicher Verminderung der Durchlässigkeit durch Verklebung der Thür- und Fenster-Ritzen mit Papier angestellt worden sind. Die übrigen drei Werthe ordnen sich offenbar nach den äusseren Temperaturen, in dem Sinne, dass sie um so grösser ausfallen, je höher jene Temperaturen sind, und der Zusammenhang ist ein so einfacher, dass sich die 3 reducirten Lufterneuerungen durch die Formel

$$E_0 = 0,061 + 0,0025 t$$

exakt darstellen lassen.

Demnach wäre am 11. Dezember $E_0 = 0,0585$ zu erwarten gewesen, und der Einfluss, welchen das Verkleben der Ritzen hatte, ist auf $\frac{115}{470}$ oder ungefähr 25 Procent des beobachteten Luftwechsels anzuschlagen. Damit ist vielleicht der Beitrag, welchen die Ritzen der Fenster und Thüren zum Luftwechsel lieferten, voll bemessen, insbesondere wenn das Papier, mit welchem verklebt wurde, noch feucht war.

Im Uebrigen kann man in der einfachen Beziehung zwischen der reduzierten Lüfterneuerung E_0 und der äusseren Temperatur t , wie sie in einer Gleichung von der Form

$$E_0 = a + b t$$

hervortritt, eine schöne Bestätigung für die an sich sehr wahrscheinliche und auch schon früher von Märker und von C. Lang ausgesprochene Ansicht finden, dass die Begrenzungen unserer Wohnräume bei höherer Temperatur für Luft durchlässiger sind als bei tiefer. Denn wenn eine solche Beziehung existirt, so kann sie jedenfalls durch eine Reihenentwicklung von der Form

$$a + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

dargestellt werden, von welcher, wie es scheint, die ersten beiden Glieder für das beschränkte Intervall der Temperaturen, welches die Versuche umfassen, genügen.

Es ist nicht nöthig, bei der Beziehung zwischen der Durchlässigkeit der Wohnungsgrenzen und der Temperatur die Gedanken auf die Erweiterungen zu beschränken, welche die Poren der Steine . . . durch Ausdehnung des Materiales erfahren. Es wird vielmehr neben dieser Wirkung der Wärme auch der Einfluss in Betracht zu ziehen sein, welchen sie auf die Feuchtigkeit der Wände . . . ausübt. Die Feuchtigkeit schliesst nicht nur die Poren der Steine, sondern sie verengt auch durch Quellung des Holzes die Fugen und Ritzen, denen ein grosser Antheil an der Durchlässigkeit zu-

zuschreiben ist. Hohe Temperaturen werden demnach die Durchlässigkeit auch dadurch vergrössern, dass sie zur Austreibung der Feuchtigkeit mitwirken oder deren Festsetzung (Condensation) in den Mauern verhindern.

Daraus folgt, dass man die grösste Durchlässigkeit und somit den grössten (reducirten) Luftwechsel nach einer Reihe trockener und warmer Tage, den geringsten nach kalter und feuchter Witterung, mittleren bei trockener Kälte und bei veränderlichem Sommerwetter zu erwarten hat.

Die Resultate der Pettenkofer'schen Versuche widerstreben dieser Erklärung nicht, zur Bestätigung derselben sind jedoch weitere Untersuchungen in Verbindung mit genauer Beschreibung der meteorologischen Verhältnisse erforderlich.

Tafel der Werthe von $1:(e^R-1)$

I. Abtheilung.

E	10'	15'	20'	25'	30'	40'	50'	60'	120'	(Min. Beob- achtungszeit $t = \frac{10}{60} \dots$)
0,10	59,5	39,5	29,5	23,5	19,5	14,5	11,5	9,5	4,5	
0,12	49,5	32,8	24,5	19,5	16,2	12,0	9,5	7,8	3,7	
0,14	42,4	28,1	20,9	16,7	13,8	10,2	8,0	6,6	3,1	
0,16	37,0	24,5	18,3	14,5	12,0	8,9	7,0	5,8	2,7	
0,18	32,8	21,7	16,2	12,8	10,6	7,8	6,2	5,1	2,3	
0,20	29,5	19,5	14,5	11,5	9,5	7,0	5,5	4,5	2,03	
0,22	26,8	17,7	13,1	10,4	8,6	6,4	5,0	4,1	1,83	
0,24	24,5	16,2	12,0	9,5	7,8	5,8	4,5	3,7	1,63	
0,26	22,6	14,9	11,1	8,8	7,2	5,3	4,1	3,4	1,47	
0,28	20,9	13,8	10,2	8,1	6,6	4,9	3,8	3,1	1,34	
0,30	19,5	12,8	9,5	7,5	6,2	4,52	3,53	2,86	1,22	
0,32	18,3	12,0	8,9	7,0	5,8	4,22	3,28	2,65	1,13	
0,34	17,2	11,3	8,3	6,6	5,4	3,94	3,06	2,47	1,05	
0,36	16,2	10,6	7,8	6,2	5,1	3,69	2,86	2,31	0,97	
0,38	15,3	10,0	7,4	5,8	4,8	3,46	2,69	2,17	0,89	
0,40	14,5	9,5	7,0	5,5	4,52	3,27	2,53	2,03	0,82	
0,42	13,8	9,0	6,7	5,2	4,29	3,11	2,39	1,91	0,76	
0,44	13,1	8,6	6,4	4,9	4,08	2,94	2,26	1,81	0,71	
0,46	12,5	8,2	6,1	4,7	3,87	2,79	2,14	1,71	0,66	
0,48	12,0	7,8	5,8	4,5	3,69	2,65	2,03	1,62	0,62	
0,50	11,5	7,5	5,5	4,31	3,53	2,53	1,93	1,54	0,58	
0,52	11,1	7,2	5,3	4,13	3,38	2,42	1,84	1,47	0,55	
0,54	10,6	6,9	5,1	3,97	3,24	2,31	1,75	1,40	0,52	
0,56	10,2	6,6	4,9	3,82	3,11	2,21	1,68	1,34	0,49	
0,58	9,8	6,4	4,7	3,67	2,98	2,12	1,61	1,28	0,46	
0,60	9,5	6,2	4,52	3,53	2,86	2,03	1,54	1,22	0,43	
0,62	9,2	6,0	4,36	3,41	2,75	1,94	1,48	1,17	0,41	
0,64	8,9	5,8	4,22	3,29	2,65	1,86	1,42	1,12	0,39	
0,66	8,6	5,6	4,08	3,18	2,56	1,79	1,36	1,07	0,37	
0,68	8,3	5,4	3,94	3,07	2,47	1,73	1,31	1,02	0,35	
0,70	8,1	5,21	3,80	2,96	2,39	1,68	1,26	0,98	0,33	
0,72	7,8	5,06	3,68	2,87	2,31	1,62	1,21	0,94	0,312	
0,74	7,6	4,92	3,57	2,78	2,24	1,57	1,17	0,91	0,297	
0,76	7,4	4,78	3,47	2,69	2,17	1,52	1,13	0,88	0,282	
0,78	7,2	4,65	3,37	2,61	2,10	1,47	1,09	0,85	0,267	
0,80	7,01	4,52	3,28	2,53	2,03	1,42	1,05	0,82	0,253	
0,82	6,83	4,40	3,20	2,46	1,97	1,38	1,02	0,79	0,240	
0,84	6,66	4,29	3,11	2,39	1,91	1,34	0,98	0,76	0,228	
0,86	6,49	4,18	3,02	2,32	1,86	1,30	0,95	0,74	0,217	
0,88	6,33	4,08	2,94	2,26	1,81	1,26	0,92	0,71	0,206	
0,90	6,18	3,97	2,86	2,20	1,76	1,22	0,89	0,68	0,197	
0,92	6,01	3,87	2,79	2,14	1,71	1,18	0,87	0,66	0,188	
0,94	5,91	3,78	2,72	2,08	1,66	1,14	0,84	0,64	0,180	
0,96	5,78	3,69	2,65	2,03	1,62	1,11	0,82	0,62	0,172	
0,98	5,65	3,61	2,59	1,98	1,58	1,08	0,79	0,60	0,164	
1,00	5,52	3,53	2,53	1,93	1,54	1,05	0,77	0,58	0,156	

Tafel der Werthe von $1:(e^K-1)$
II. Abtheilung.

<i>K</i>	10'	15'	20'	25'	30'	40'	50'	60'	120'	(Min. Beob- achtungszeit $t = \frac{10}{60} \dots$)
1.0	5,52	3,53	2,53	1,93	1,54	1,05	0,769	0,582	0,156	
1.1	4,97	3,15	2,26	1,71	1,36	0,924	0,666	0,499	0,125	
1.2	4,52	2,86	2,03	1,54	1,22	0,816	0,582	0,431	0,100	
1.3	4,13	2,60	1,84	1,39	1,09	0,726	0,512	0,375	0,080	
1.4	3,80	2,39	1,68	1,26	0,98	0,648	0,452	0,327	0,065	
1.5	3,53	2,20	1,54	1,15	0,90	0,582	0,402	0,287	0,052	
1.6	3,28	2,03	1,42	1,05	0,816	0,525	0,358	0,253	0,042	
1.7	3,05	1,89	1,31	0,97	0,746	0,475	0,320	0,223	0,034	
1.8	2,86	1,76	1,22	0,90	0,684	0,431	0,287	0,197	0,028	
1.9	2,69	1,64	1,13	0,83	0,631	0,392	0,258	0,175	0,023	
2.0	2,53	1,54	1,05	0,77	0,582	0,358	0,233	0,156	0,018	
2.1	2,39	1,45	0,98	0,714	0,538	0,327	0,210	0,139	0,015	
2.2	2,26	1,36	0,92	0,666	0,499	0,300	0,190	0,125	0,012	
2.3	2,14	1,29	0,86	0,622	0,463	0,275	0,172	0,111	0,010	
2.4	2,03	1,22	0,82	0,582	0,431	0,253	0,156	0,100	0,008	
2.5	1,93	1,15	0,77	0,545	0,402	0,233	0,142	0,089	0,007	
2.6	1,84	1,09	0,725	0,512	0,375	0,214	0,129	0,080	0,006	
2.7	1,76	1,04	0,684	0,481	0,350	0,197	0,117	0,072	0,005	
2.8	1,68	0,99	0,648	0,452	0,327	0,183	0,107	0,065	0,004	
2.9	1,61	0,94	0,614	0,426	0,306	0,169	0,098	0,058	0,003	
3.0	1,54	0,90	0,582	0,402	0,287	0,156	0,090	0,052	0,0025	

Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme.

Von Walther Dyck.

(Eingelaufen 3. Januar.)

(Mit Taf. I bis IV.)

§ 1.

Fragestellung und Disposition.

Die Untersuchungen über die gestaltlichen Verhältnisse des durch eine Differentialgleichung erster Ordnung mit reellen Coefficienten zwischen zwei Veränderlichen x, y :

$$(1.) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

in der Ebene (x, y) definirten Curvensystems haben sich vor allen Dingen mit den Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades

$$(2.) \quad X + Y \frac{dy}{dx} = 0$$

(wo X, Y reelle eindeutige Functionen von x, y bedeuten) beschäftigt. Unter der Voraussetzung, dass „im Allgemeinen“ die Entwicklung von X, Y an jeder endlichen Stelle x_0, y_0 nach ganzen Potenzen von $x - x_0, y - y_0$ möglich ist, und dabei die Glieder erster Ordnung der Entwicklung stets vor-

handen sind, lassen sich die singulären Stellen des durch die Gleichung (2.) definirten Curvensystems characterisiren durch das Verhalten der Curven des durch die Gleichung

$$(3.) \quad (m_1 x + n_1 y) + (m_2 x + n_2 y) \frac{dy}{dx} = 0$$

gegebenen Systems im Punkte $x = 0, y = 0$, und es fügen sich durch eine geeignete Transformation auch etwa im Unendlichen vorhandene singuläre Stellen des Systemes (2.) in diese Characteristik ein. Je nach den Werten der reellen Coefficienten m, n in (3.) lassen sich drei Haupttypen von singulären Stellen unterscheiden — auf welche wir im Folgenden noch einzugehen haben werden.¹⁾

Von hier ab haben sich die Untersuchungen einmal auf specielle Fälle jener Typen ausgedehnt;²⁾ weiter aber hat Poincaré in einer Reihe von Abhandlungen „Sur les courbes définies par une équation différentielle“ Methoden aufgestellt, welche den Gesamtverlauf des durch eine Differentialgleichung (2.) definirten Curvensystems, welches die Ebene (x, y) einfach überdeckt, zu discutiren gestatten; überdies hat Poincaré diese Untersuchungen auch auf Differentialgleichungen höheren Grades und auf Systeme von Differentialgleichungen ausgedehnt.

Betrachten wir nun die „allgemeinen“ Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(1.) \quad F(x, y, y') = 0,$$

1) Man vergleiche hierzu etwa die Entwicklungen in Serret's Differential- und Integral-Rechnung (in der Bearbeitung von Harnack) pag. 68 ff. der 2. Abt. des II. Bandes, sowie die sogleich genauer zu besprechenden Untersuchungen von Poincaré im Journal de Mathématiques Serie 3, Bd. VII und VIII; Serie 4, Bd. I und II.

2) Vergl. z. B. Björling, Ueber singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen 1. O. und 1. Grades. Grunerts Archiv, 2. Reihe, Bd. 4.

Lösung darstellt. Es muss dann jedenfalls neben den Gleichungen (5.) noch die weitere

$$(6.) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

für alle Punkte dieses Ortes erfüllt sein.

Weiterhin aber gibt die Möglichkeit eines Zerfallens der Discriminantencurve in eine Reihe mehrfach zählender Factoren Anlass, noch weitere besondere Vorkommnisse, wie den Ort von Berührungspunkten je zweier Curven des Systemes u. a. zu untersuchen.¹⁾

„Im Allgemeinen“ treten jedoch alle solche Vorkommnisse nicht ein; die Discriminantencurve ist Spitzenort, und die Gleichungen (5.) und (6.) sind nur für einzelne Punkte gleichzeitig erfüllt; diese Punkte der Discriminantencurve sind dann wesentlich singuläre Stellen, definirt durch das Gleichungssystem:

$$(7.) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

1) Man vergl. hierzu neben den soeben genannten Arbeiten noch die Untersuchungen von Casorati aus den Jahren 1874—1881 in den Rendiconti und Memorie della R. Accad. dei Lincei, zum Teil abgedruckt im Bulletin von Darboux, 2. Serie Band III (1879). Ferner einen Aufsatz von Björling „Ueber die Coincidenzcurve der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung“ im „Bihang“ zu den „Handlingar“ der k. schwed. Akad. d. W. Band 12, Abschnitt I (1887). — Weiter einen Aufsatz von Workman „Theory of the singular solutions . . .“ im Quaterly Journal Band 22 (1887), in welchem die Litteratur ausführlich besprochen ist. — Sodann eine Note von Kapteyn im Bulletin von Darboux, 2. Serie Band XII (1888). — Auch eine Dissertation von C. Schmidt (Giessen 1884) ist zu nennen, welche indess weder auf Darboux noch auf Cayley u. a. Bezug nimmt.

geben sich hier die durch Gleichung (3.) characterisirten Formen, wie sie bei Gleichungen ersten Grades auftreten.

Nun lässt sich allerdings aus den Poincaré'schen Formulierungen sofort erkennen, dass die Curvensysteme in der $(x\ y)$ -Ebene aus der Projection der von ihm auf der Fläche $F(x, y, z) = 0$ betrachteten folgen. Es lässt sich auch der Umstand, dass die Discriminantencurve der Ort der Spitzen der Integralcurven ist, direct aus der Bemerkung ablesen, dass die auf der Fläche $F = 0$ verlaufenden Curven die „Umrisscurve“ $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ (die dann in der Projection die Discriminantencurve abgibt) in der (Projections-) Richtung der z -Axe durchsetzen. Das Verhalten des Curvensystems in den singulären Stellen (der Umrisscurve) bedarf aber noch einer speciellen Discussion, um aus ihm den Verlauf in der Projection auf die xy -Ebene abzulesen. Auf der Fläche $F = 0$ erscheinen die in Gleichungen von der Form (3.) gekennzeichneten drei Haupttypen, aber ihre Lage gegen die Umrisscurve und gegen die Projectionsrichtung (die z -Axe) ist in den einzelnen Fällen wesentlich und erst aus deren Fixirung ergibt sich der Character der singulären Stelle in der xy -Ebene.¹⁾

Es erscheint mir daher nicht unwesentlich, auf eine genaue Discussion des Verlaufes der Curven in der Umgebung dieser singulären Stellen einzugehen und zwar in der $(x\ y)$ -Ebene selbst. Sie ist in § 2 der vorliegenden Mitteilung ausgeführt, und zwar dadurch, dass in der Umgebung der singulären Stelle die allgemeine Differentialgleichung ersetzt wird durch eine Gleichung, welche die Glieder niedrigster Ordnung in der Entwicklung umfasst: Dies ist im Allgemeinen eine Differentialgleichung

1) Vergleiche Seite 39 des Folgenden.

ein solches Unbestimmtwerden eintritt; dann wird nämlich die letzte der Gleichungen (7.) dadurch erfüllt, dass gleichzeitig

$$(9.) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

wird. Es ist nicht uninteressant, auch diese Punkte, für welche sich zunächst wieder Gleichungen von der Form (3.) zu Grunde legen lassen, weiter zu verfolgen.¹⁾ Ich will mich aber in der gegenwärtigen Mitteilung zunächst „auf den allgemeinen Fall“ (wenn diese zur Abkürzung gewählte Bezeichnung gestattet ist) beschränken. —

Neben den durch die Gleichungen (7.) definirten „wesentlich“ singulären Stellen treten nun für unsere Differentialgleichungen (sofern sie nur von höherem als zweiten Grade sind) im Allgemeinen noch Singularitäten auf, welche man als „ausserwesentliche“ bezeichnen kann: Es sind diejenigen Stellen der Ebene (x, y) , in welchen die Discriminantencurve eine Spitze besitzt, also definiert durch das Gleichungssystem:

$$(10.) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Ich verweise § 3. vergl. auch Tafel IV, Fig. IV) auf das Verhalten des D.G. Systems in diesen Stellen kurz einzugehen.

Man kann sich die durch die Gleichungen (7.) und (10.) definirten singulären Stellen des D.G. Systems im Allgemeinen durch die Betrachtung des D.G. Systems erschöpfend.

Die Discriminantencurve des Systems (7.) liefert die Curven des D.G. Systems, welche aus dem System liefert man sich durch die Betrachtung der Bestimmung des

¹⁾ Diese Punkte sind die „stationären“ Stellen der Discriminantencurve, welche eine Spitze besitzt, wesentlich ist.

gleichungen erster Ordnung definirten Curvensysteme anzuwenden. Ich denke dabei auch auf solche speciellere Fragestellungen bei nächster Gelegenheit einzugehen. Einige diesbezügliche Bemerkungen habe ich in § 5 mit Bezug auf den Verlauf der Haupttangentencurven einer Fläche angefügt. Es schien mir nämlich nicht uninteressant zu zeigen, dass die sämtlichen drei Haupttypen wesentlich singulärer Punkte im Verlauf der Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche vorkommen können an (parabolisch gekrümmten) Stellen, in welchen die Fläche eine ganz bestimmte Tangentialebene besitzt, sich also im gewöhnlichen Sinne regulär verhält¹⁾.

Der Character der in der vorliegenden Mitteilung untersuchten „im Allgemeinen vorhandenen“ singulären Stellen eines Curvensystems ist wesentlich bedingt durch die Definition des Systems durch eine Differentialgleichung. Bekanntlich gelangt man zu ganz anderen Resultaten, wenn man von der Definition eines Curvensystems durch eine Gleichung zwischen x , y und einem willkürlichen Parameter ausgeht. Es schien mir passend, (in einem letzten § 6) die unter der letzteren Annahme „im Allgemeinen“ eintretenden besonderen Vorkommnisse zusammenzustellen, wo dann der wesentliche Unterschied der beiden Annahmen klar zum Ausdruck gelangt.

1) Hierzu vergleiche man den Aufsatz von Klein im VI. Bande der mathematischen Annalen „Ueber Flächen dritter Ordnung,“ in welchem einer der hier zu besprechenden Typen dargestellt ist für den Verlauf der Haupttangentencurven in der Umgebung der sogenannten asymptotischen Punkte (a. a. O. pag. 576 und Tafel VI).

Bezüglich des Verhaltens der Haupttangentencurven in singulären Punkten einer Fläche habe ich zusammen mit Herrn Finsterwalder im math. Institut der techn. Hochschule Untersuchungen veranlasst, über die bei anderer Gelegenheit berichtet werden soll.

§ 2.

Die wesentlich singulären Stellen einer „allgemeinen“ Differentialgleichung erster Ordnung.

Um das Verhalten des durch die Gleichung

$$(1.) \quad F(x, y, y') = 0$$

definirten Curvensystems in der Umgebung eines singulären Punktes, für welchen

$$(7.) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

statthat, zu studiren, sei der singuläre Punkt im Coordinatenanfangspunkt $x = 0, y = 0$ angenommen und die x -Axe in ihm als Tangente an die Discriminantencurve, so dass

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0$$

ein Lösungssystem der Gleichungen (7.) bildet.

Die nach den Voraussetzungen über die Funktion F an jeder Stelle mögliche Potenzentwicklung gestaltet sich im Nullpunkt zunächst folgendermassen:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{F}_2 y}{2} \\ & + \frac{1}{2}(\overline{F}_{11} x^2 + 2\overline{F}_{12} xy + \overline{F}_{22} y^2) + (\overline{F}_{13} x + \overline{F}_{23} y)y' + \frac{1}{2}\overline{F}_{33} y'^2 \\ & + \frac{1}{6}(\overline{F}_{111} x^3 + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Nun wird die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

erfüllt, wenn man setzt:

$$y = y' \cdot x \cdot v$$

wo v für $x = 0$ nicht verschwindet. Substituieren wir diesen Wert von y in der obigen Entwicklung, so erhalten wir Aufschluss über die Grössenordnung der einzelnen Terme derselben. Die oben durch Unterstreichen hervorgehobenen Glieder sind in x und y' von der zweiten Dimension, alle übrigen von höherer. Indem wir eine etwas kürzere Bezeichnungsweise für die Zahlencoefficienten jener Glieder einführen, von denen „im Allgemeinen“ keines verschwindet, erhalten wir folgenden Satz:

Das Verhalten des durch die Differentialgleichung zweiten Grades:

$$(11.) \quad y'^2 + 2cxy' + bx^2 + 2ay = 0$$

definirten Curvensystems in der Umgebung des Punktes $x = 0, y = 0$ ist typisch für die „im Allgemeinen“ auftretenden, durch die Gleichungen (7.) definirten Singularitäten einer Differentialgleichung erster Ordnung.¹⁾

Die Integration dieser Differentialgleichung lässt sich sofort bewerkstelligen. Ich führe dieselbe, um die Beziehung der hier auftretenden Singularitäten zu den bei den Gleich-

1) Man vergleiche bezüglich der allgemeinen Formulirung der Reduction einer Differentialgleichung auf die Glieder niedrigster Dimension, vor Allem die schon genannte Abhandlung von Briot und Bouquet (im 36. Heft des Journal de l'école Polyt.) Abschn. III und IV. Weitere Ausführungen darüber enthält auch ein neuerdings erschienener Aufsatz von Fine „On the Functions defined by differential equations, with an extension of the Puiseux Polygon-Construction of these equations. American Journal Bd. XI, 1889.

Wählt man für $F(x, y, z) = 0, y' = z$ wieder die Deutung als Fläche über der (xy) -Ebene, so besagt hier die Beschränkung auf die Glieder (10.), dass die Fläche, welche wegen $\overline{F}_1 = 0, \overline{F}_2 = 0$ im Coordinatenanfangspunkt die Ebene (xz) berührt, ersetzt wird durch ein Paraboloid.

ungen 1. Grades stattfindenden möglichst scharf hervortreten zu lassen, im Folgenden näher aus:

Durch Differentiation nach x entsteht aus (11.) die Differentialgleichung ersten Grades in x und y' :

$$(12.) \quad (c x + y') \frac{dy'}{dx} + b x + (a + c) y' = 0$$

Es sei nun der Uebersichtlichkeit der folgenden Entwicklung wegen in dieser Differentialgleichung x durch die Bezeichnung x' ersetzt. Wir deuten dann den Verlauf der Curven dieses Systems (12.) in einer Ebene (x', y') und kehren von ihr zu den Curven des Systems (11.) zurück mit Hülfe der ein-zweideutigen Abbildung der Ebene (x', y') in die ursprüngliche Ebene (x, y) :

$$(13.) \quad \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -c x \pm \sqrt{(c^2 - b) x^2 - 2 a y}, \end{aligned}$$

wo dann umgekehrt:

$$(13a.) \quad y = -\frac{1}{2a} (y'^2 + 2 c x' y' + b x'^2)$$

ist.

Das Integral der Differentialgleichung (12.) lässt sich nun bekanntlich in der Form¹⁾

$$(14.) \quad (x' + \lambda_1 y')^{q_1} \cdot (x' + \lambda_2 y')^{q_2} = C$$

darstellen, wobei man hat:

$$\lambda_1 = \frac{a + 2c + \sqrt{D}}{2b}, \quad \lambda_2 = \frac{a + 2c - \sqrt{D}}{2b},$$

1) Es ist für das Folgende unerlässlich, hier eine Reihe bekannter Formeln zusammenzustellen, bezüglich deren man etwa Serret-Harnack, Diff. u. Integral-Rechnung II, 2 pag. 66 ff. vergleiche.

$$g_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{-a + \sqrt{D}}{\sqrt{D}}, \quad g_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{a + \sqrt{D}}{\sqrt{D}},$$

$$D = (a + 2c)^2 - 4b,$$

und hier ergeben sich nun die drei Haupttypen der singulären Stellen der Differentialgleichung ersten Grades folgendermassen:

I'. Für

$$(16.) \quad (a + 2c)^2 - 4b < 0$$

werden die Wurzeln λ_1 und λ_2 , und ebenso g_1 und g_2 imaginär. Die Integralcurven bilden ein System logarithmischer Spiralen um den Nullpunkt. [Fig. I' der Tafel].

II' und III'. Für

$$(17.) \quad (a + 2c)^2 - 4b > 0$$

hat man zu unterscheiden, ob

II'. g_1 und g_2 gleiches Vorzeichen

III'. g_1 und g_2 verschiedenes Vorzeichen besitzen. Dies hängt davon ab, ob

$$(18.) \quad c(a + c) - b \gtrless 0$$

ist.

Im Falle II' bilden die beiden Geraden

$$G_1: x' + \lambda_1 y' = 0 \text{ und } G_2: x' + \lambda_2 y' = 0$$

zwei ausgezeichnete Richtungen durch den singulären Punkt und es schliesst sich das Curvensystem an diese in der den Exponenten g_1 und g_2 entsprechenden Ordnung asymptotisch an. [Fig. II' der Tafel.]

Im Falle III' laufen sämtliche Curven des Integralsystems durch den singulären Punkt und berühren hier die

eine der beiden ausgezeichneten Geraden, und zwar die Gerade G_2 , bez. G_1 , je nachdem.

$$(19.) \quad -\frac{g_2}{g_1} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 1$$

ist. [Fig. III' der Tafel.]

Die Transformation (13.) verwandelt nun diese Typen in die von uns gewünschten für die singuläre Stelle $x = 0$, $y = 0$ der Differentialgleichung (11.). Die gestaltliche Umformung ergibt sich dabei in übersichtlichster Weise: Die Ebene (x', y') wird derart auf die Ebene (x, y) abgebildet, dass das Geradenbüschel:

$$x' + \lambda y' = 0$$

übergeht in das System der die x -Axe berührenden Parabeln:

$$(20.) \quad (b \lambda^2 - 2 c \lambda + 1) x^2 + 2 a \lambda^2 y = 0,$$

während die Parallelen zur y' -Axe wegen

$$x' = x$$

wieder in solche zur y -Axe verwandelt werden. Die Gerade

$$(21.) \quad c x' + y' = 0$$

wird übergeführt in die Parabel

$$(b - c^2) x^2 + 2 a y = 0$$

und diese bildet in der Ebene (x, y) die Discriminantencurve: Der Teil

$$(b - c^2) x^2 + 2 a y < 0$$

dieser Ebene erscheint doppelt überdeckt bez. von den Bildern der beiden Hälften

$$c x' + y' \gtrless 0$$

der Ebene (x', y') .

Für die weitere Characterisirung der Abbildung ist es nun wichtig, die gegenseitige Lage der Geraden

(24.) $G \equiv x' = 0$, $G_1 \equiv x' + \lambda_1 y' = 0$, $G_2 \equiv x' + \lambda_2 y' = 0$
und jener eben genannten

$$G_3 \equiv x' + \frac{1}{c} y' = 0$$

für die Fälle II und III genau zu bezeichnen.

Man schneide zu dem Ende die letzten drei Geraden durch eine Parallele zur y -Axe (G) und bezeichne die Ordinaten der Schnittpunkte bez. mit y_1, y_2, y_3 , dann ist für die gegenseitige Lage, wie sich sofort aus den oben mitgetheilten Formeln ergibt, folgende einfache Beziehung massgebend:

$$(25.) \quad y_2 - y_3 : y_3 - y_1 : y_2 - y_1 = g_2 : g_1 : g_1 + g_2$$

a) Aus der ersten dieser Proportionen folgt unmittelbar, dass im Falle II, also für $\frac{g_2}{g_1} > 0$, die Geraden G und G_3 von den beiden anderen G_1 und G_2 getrennt werden, während sie im Falle III, für $\frac{g_2}{g_1} < 0$ nicht getrennt werden.

b) In letzterem Falle besagt dann der zweite Teil der Proportion (25.), also etwa:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = 1 + \frac{g_2}{g_1},$$

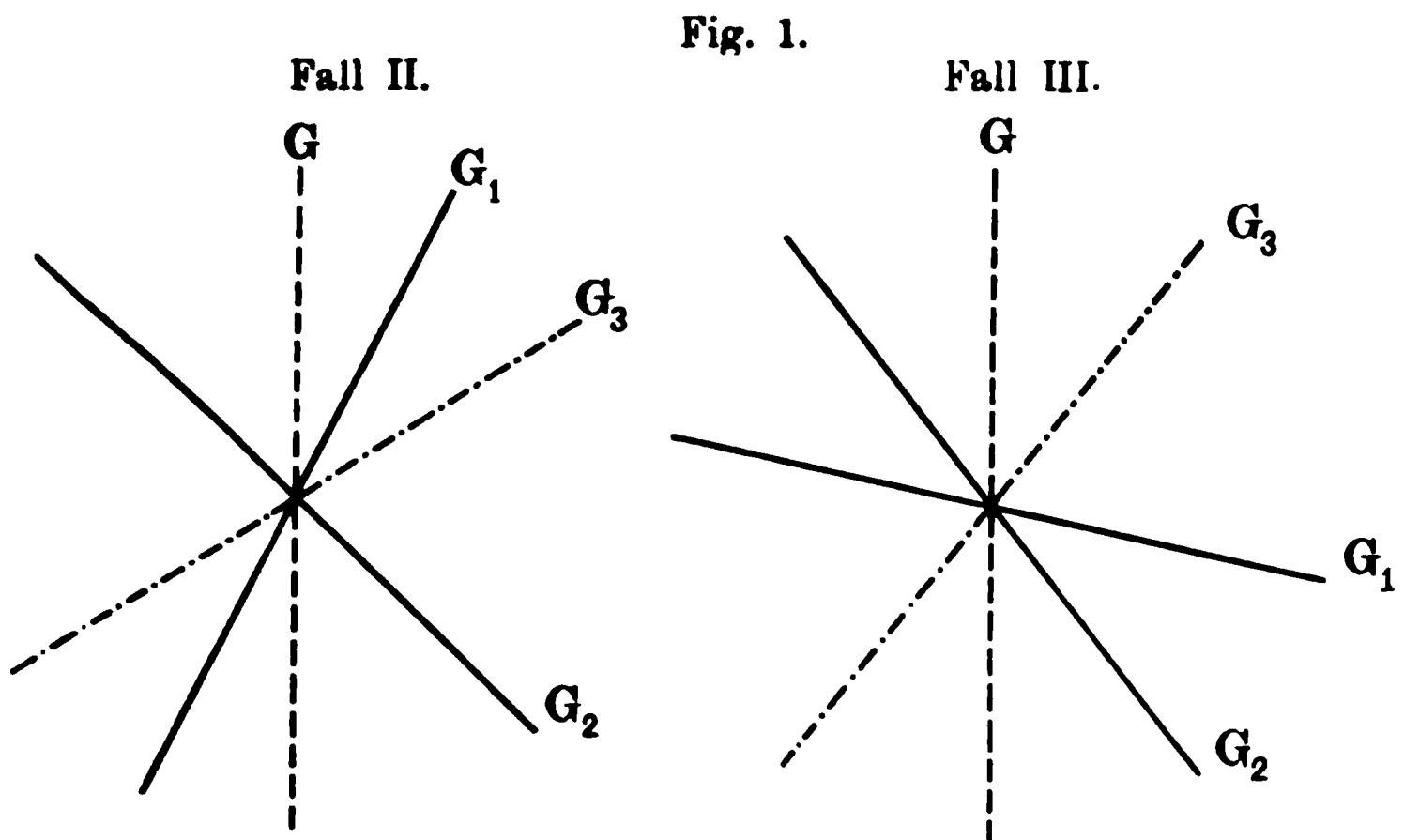
dass die Geraden G und G_1 von G_2 und G_3 getrennt, beziehungsweise nicht getrennt werden, je nachdem

$$-\frac{g_2}{g_1} \leq 1$$

ist, also (vergleiche die Formel (19.)) je nachdem die Gerade G_2 oder G_1 von den Curven des Integralsystems berührt wird. Diese letztere Bedingung lässt sich auch so aussprechen:

Im Falle III wird die Gerade G_3 und diejenige der beiden Geraden G_1, G_2 , welche von den Curven des Systems nicht berührt wird, getrennt von der Geraden G und der zweiten der Geraden G_1, G_2 .

Der Zusammenhalt der durch (a) und (b) gekennzeichneten möglichen Lagen ergibt also im Falle II wie III wesentlich nur je eine schematische Figur, welche die gegenseitige Lage der vier Geraden bezeichnet:



Dabei ist in Figur III die Gerade, welche von den Curven des Systems berührt wird, mit G_1 bezeichnet.

Nunmehr lässt sich das Resultat der Transformation auf unsere in den Figuren I', II', III' der Tafeln dargestellten Typen auch gestaltlich mit aller Bestimmtheit angeben.

Man beachte dabei, dass alle Schnittpunkte unserer in der $(x' y')$ -Ebene gegebenen Curven mit der Geraden

$$c x' + y' = 0$$

zu Spitzen auf der Discriminantencurve

$$(b - c^2) x^2 + 2 a y = 0$$

der (x, y) -Ebene Veranlassung geben ¹⁾).

I. Fall I. Die logarithmischen Spiralen des Typus I' ergeben in der (x, y) -Ebene Curven, welche im Innenbereich der Discriminantencurve unendlich oft um den singulären Punkt oscilliren, und dabei mit Spitzen auf die Discriminantencurve auftreffen. Vergl. Fig. (I) der Tafel, in welcher (wie auch in den folgenden Figuren) die Beziehung zur darüberstehenden Figur (I') durch verschiedene Ausführung der entsprechenden Linien angedeutet ist ²⁾).

II. Im Falle II erhält man aus den Geraden G_1 und G_2

$$x' + \lambda_1 y' = 0 \text{ und } x' + \lambda_2 y' = 0$$

(vergl. Formel (20)) die zwei durch den singulären Punkt laufenden Parabeln:

$$x^2 + 2 \lambda_1 y = 0 \text{ und } x^2 + 2 \lambda_2 y = 0,$$

1) Die Gerade

$$c x' + y' = 0$$

verbindet in der (x', y') -Ebene die Punkte, für welche $y'' = \infty$, d. h. die Tangente parallel zur y' -Axe ist; so lässt sich (vergl. die Figuren I', II', III' der Tafeln) aus diesem Umstand die oben entwickelte gegenseitige Lage der Geraden G_1 , G_2 , G_3 auch gestaltlich erschliessen.

2) In Figur I, wie in II und III ist ferner durch die ganz fein punktirte Linie die Curve der Wendepunkte für das System angedeutet; es ist dies die Curve, welche (vergl. Darboux a. a. O. Bulletin Band IV, pag. 161) durch Elimination von y' aus den zwei Gleichungen

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

entsteht; in unserem Falle der Gleichung (10.) erhält man die Parabel

$$b(a^2 - c^2 + b) \cdot x^2 + 2 a(a + c)^2 \cdot y = 0$$

welcher in der Ebene $(x' y')$ die gleichfalls punktirt angedeutete Gerade

$$b x' + (a + c) y' = 0$$

entspricht.

§ 3.

Die ausserwesentlich singulären Stellen einer „allgemeinen“ Differentialgleichung erster Ordnung.

Zur Discussion der durch das Gleichungssystem

$$(10.) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$$

definirten singulären Stellen unseres Curvensystems, den Spitzen der Discriminantencurve, sei wieder

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0$$

als Lösungssystem von (10.) angenommen. Die Entwicklung von F an dieser Stelle gestaltet sich dann folgendermassen:

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\bar{F}_1}} x + \underline{\underline{\bar{F}_2}} y + \\ & + \frac{1}{2} (\bar{F}_{11} x^2 + 2 \bar{F}_{12} x y + \bar{F}_{22} y^2) + (\underline{\bar{F}_{13}} x + \underline{\bar{F}_{23}} y) y' \\ & + \frac{1}{6} \underline{\underline{\bar{F}_{111}}} y'^3 + \dots \end{aligned}$$

Hier sind analog wie in § 2 die Glieder niedrigster Ordnung (durch doppeltes Unterstreichen) hervorgehoben und dann auch (durch einfaches Unterstreichen) die Glieder nächst höherer Ordnung. Für die Betrachtung des Curvensystems in der Umgebung der singulären Stelle legen wir also (mit kürzerer Bezeichnung) die Differentialgleichung dritten Grades zu Grunde:

$$(26.) \quad 0 = a x - y + b x y' + c y'^3$$

bei welcher „im Allgemeinen“ keines der Glieder fehlt.

Gehen wir zunächst auf die erste Annäherung durch

$$(27.) \quad 0 = a x + c y'^3$$

ein, so kennzeichnet dieselbe die Singularität der einen durch den singulären Punkt laufenden Curve des Systems: y' als Parameter betrachtet, ergibt sich für x und

§ 4.

Relationen zwischen der Anzahl der singulären Stellen in einem gegebenen, von der Discriminantencurve begrenzten Gebiete. Bemerkungen über den Gesamtverlauf der Curvensysteme.

Handelt es sich darum, sich über den Gesamtverlauf des durch unsere Differentialgleichung

$$(1.) \quad F(x, y, y') = 0$$

definirten Curvensystems zu orientiren, so wird man zunächst mit Hülfe der Discriminantencurve, längs welcher die verschiedenen Wertsysteme y' , welche den Stellen (x, y) zugehören, zusammenhängen, die Ebene (x, y) in eine Anzahl nur einfach überdeckter Gebiete zerlegen — es sind dies, wenn wir wieder an die von Poincaré gewählte Deutung von $F = 0$ als Fläche denken, die einzelnen Schichten der Projection dieser Fläche auf die (x, y) -Ebene. Nehmen wir z. B. F als eine rationale ganze Function von x, y, y' , in y' vom Grade n an, so sind es eine Anzahl von höchstens n durch die Discriminantencurve von einander getrennten Gebieten (die ihrerseits wieder aus mehreren Stücken bestehen können). Ich habe in einer früheren Untersuchung¹⁾ ausführlich gezeigt, in welcher Weise wir diese einzelnen Gebiete und ihre gegenseitige Lage im Sinne der Analysis situs vollständig characterisiren können.

Jedem der Teilgebiete kommt nun eine „characteristische Zahl“ K_i zu — die bekannte Zusammenhangszahl, die ich in der Form der „Kronecker'schen Cha-

1) Beiträge zur Analysis situs III. Mitteilung. Berichte der k. sächs. Gesellschaft d. W. vom März 1887 pag. 44.

Fig. 3. II. Fall.

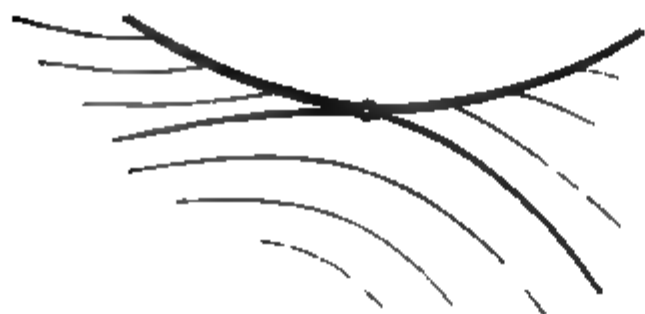
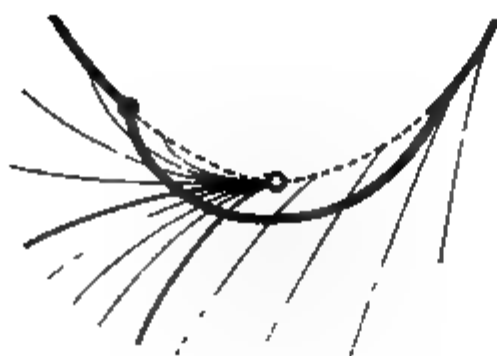


Fig. 4. III. Fall.



Zerschneidung der Gebiete längs der Discriminanten-curve beachtet werden, dass das eine der zerschnittenen Teilgebiete über der (x, y) -Ebene sich überkreuzt, wie in der untenstehenden Figur 5, in welcher die zerschnittenen Teile von einander getrennt dargestellt sind:

Fig. 5.



Hat man in der angegebenen Weise die Zerschneidung getroffen, so läuft in jedem Teilgebiet durch jeden Punkt des Innern sowie des Randes nur je eine Curve des Integralsystems. Von den wesentlich singulären Stellen I, II, III des Randes aber laufen beziehungsweise je 0, 2, ∞ viele Zweige aus; von den ausserwesentlich singulären Stellen ver-

Summirt man über die sämtlichen Teilgebiete und beachtet, dass dann jeder singuläre Punkt zweimal vorkommt, so folgt:

$$(29.) \quad K = \Sigma K_i = s_0 + s_1 - s_2,$$

wo jetzt die s die Gesamtanzahlen der wesentlichen Singularitäten I^{ter}, II^{ter} und III^{ter} Art bedeuten, und die Zahlen für die ausserwesentlich singulären Punkte R_0, R_2 , die immer paarweise auftreten, in Wegfall kommen.

Formeln von der Gestalt (29.) erhält man für jeden in sich geschlossenen Teil der Fläche $F = 0$. Diese sind (bis auf die Zählweise) identisch mit den von Poincaré a. a. O.¹⁾ gegebenen.

Bezüglich der Allgemeingültigkeit der Formeln (28.) und (29.) sei noch erwähnt, dass es keinerlei Unterschied macht, ob etwa einige Teilgebiete sich durch das Unendliche hinstrecken. Solche Gebiete sind dann (sofern sie nicht durch eine blosse Projection ganz ins Endliche gebracht werden können) Gebiete „von umkehrbarer Indicatrix“, was aber, wie ich schon Annalen 32 hervorgehoben, für die zu Grunde gelegte Art, den Zusammenhang abzuzählen, ohne jeden Einfluss ist²⁾.

Für die Ausführung der in Formel (28.) angedeuteten Summation über die Punkte P und R für ein Teilgebiet von der Charakteristik K_i werden nun die Punkte R_2 und R_0

1) Journal de math. Serie 4 Bd. I pag. 203.

2) Darin und in der gleichfalls hier benutzten directen Summirbarkeit der Formeln liegt der Vorteil der Abzählung des Zusammenhanges mit Hülfe der Punktcharacteristiken. Poincaré betrachtet, um der Schwierigkeit zu entgehen, die unendlich weiten Elemente der Ebene übersichtlich in die Formulirung einzubegreifen, die Projection der Ebene auf eine Kugel vom Centrum aus. Hier tritt also der Character der Ebene als Fläche mit umkehrbarer Indicatrix dadurch hervor, dass die Ebene zweimal auf die Kugel abgebildet erscheint, wobei dann der Aequator als „Uebergangslinie“ die Stelle der unendlich weiten Geraden in der Ebene vertritt.

so lassen sich die gestaltlichen Möglichkeiten für ein dieses Gebiet überdeckendes Curvensystem auf eine Reihe von kanonischen Formen zurückführen, zu denen noch die Aenderung der Systemcurven je um gewisse „Periodenwege“, welche die verschiedenen Teilränder des Gebietes umkreisen, hinzutreten.

Ich denke in weiterer Ausführung dieser Untersuchungen, die ganz im Sinne der Poincaré'schen Darstellungen liegen, auf die hiermit gegebenen Mannigfaltigkeiten noch näher einzugehen. Hier seien nur noch folgende besondere Fälle erwähnt, bei denen wir voraussetzen, dass ausserwesentlich singuläre Punkte R fehlen sollen (wie dies z. B. bei den Haupttangentialcurven einer Fläche, und überhaupt für jedes durch eine Differentialgleichung zweiten Grades definirte System im Allgemeinen der Fall ist). Man entnimmt dann der Formel (28.) unmittelbar die folgenden Sätze:

1. Im Falle eines „einfach zusammenhängenden, einfach berandeten“ Gebietes, für welches $K_1 = 1$ ist, sind mindestens zwei singuläre Stellen vom Typus I oder III vorhanden.

Dabei ist bemerkenswert, dass für diese Minimalzahl der singulären Stellen der leicht darzustellende Gesamtverlauf des Curvensystems im Sinne der Analysis situs vollständig festgelegt ist mit der Unterscheidung der folgenden drei Fälle: Im Gebiete liegen

- a) 2 singuläre Stellen vom Typus I
- b) 1 singuläre Stelle vom Typus I und 1 vom Typus III
- c) 2 singuläre Stellen vom Typus III. —

Die Discussion des Gesamtverlaufes des durch die Differentialgleichung (11.) definirten Curvensystems, welches das Gebiet $(b - c^2)x^2 + 2ay < 0$ doppelt überdeckt, ist nicht ohne Interesse und kann, soferne es sich dabei um den „elliptischen“ Teil der Ebene handelt (wie in Fig. I.) als

Beispiel für den Verlauf von speciellen Curvensystemen in einem Gebiete $K_i = 1$ dienen.

2. Im Falle $K_i = -n^1$) sind in dem Gebiete mindestens $2n$ Stellen vom Typus II vorhanden; die Art der Verteilung dieser Stellen auf die verschiedenen Ränder des Gebietes liefert dabei die kanonischen Formen für den Gesamtverlauf des Systems.

Speciell hat man: Nur für die Charakteristik $K_i = 0$ eines Teilgebietes kann es eintreten, dass das überdeckende Curvensystem keinerlei singuläre Stellen besitzt.

§ 5.

Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Haupttangentialcurven einer Fläche $z = f(x, y)$.

Eine nicht uninteressante Anwendung unserer Untersuchungen lässt sich für die Theorie der Haupttangentialcurven einer Fläche

$$(30.) \quad z = f(x, y)$$

machen. Hier hat man es für die Projection der Haupttangentialcurven auf die (x, y) -Ebene mit einer Differentialgleichung zweiten Grades:

$$(31.) \quad F(x, y, y') = f_{22} y'^2 + 2 f_{12} y' + f_{11} = 0$$

zu tun, in welcher die f_{ik} die zweiten partiellen Ableitungen von f nach x, y bezeichnen: Die Discriminantencurve ist hier einfach die parabolische Curve:

$$(32.) \quad f_{12}^2 - f_{11} f_{22} = 0$$

der Fläche Auf ihr liegen im Allgemeinen stets wesentlich

1) Für aus einem Stück bestehende, in die Ebene ausbreitbare Gebiete ist die Zahl K_i stets < 1 ; die Zahl der Randcurven des Gebietes ist dabei gleich $2 - K_i$.

singuläre Stellen der Haupttangentencurven, die Punkte, für welche ausser der Gleichung (31.) $F=0$, noch (Formel 7) die anderen:

$$(33.) \quad \begin{aligned} f_{22} y' + f_{12} &= 0 \\ f_{222} y'^3 + 3 f_{122} y'^2 + 3 f_{112} y' + f_{111} &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Es ergibt sich nun, dass in der That die Differentialgleichung (31.) allgemeiner genug ist, um für eine Fläche $z=f(x,y)$ singuläre Punkte der Haupttangentencurven von allen drei Typen auftreten zu lassen, ohne dass darum an der betreffenden Stelle in der Entwicklung der Function $z=f(x,y)$ die Glieder erster Ordnung verschwinden, d. h. ohne dass die Fläche an einer solchen Stelle aufhört eine ganz bestimmte Tangentialebene zu besitzen.

Es sei der Coordinatenanfangspunkt eine solche singuläre Stelle. Entwickeln wir dort die Function $z=f(x,y)$:

$$\begin{aligned} z = & \quad f_1 x + \bar{f}_2 y + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ f_{11} x^2 + 2 f_{12} x y + \underline{f_{22} y^2} \right\} \\ & + \frac{1}{6} \left\{ f_{111} x^3 + \underline{3 f_{112} x^2 y} + 3 \bar{f}_{122} x y^2 + \bar{f}_{222} y^3 \right\} \\ & + \frac{1}{24} \left\{ \underline{f_{1111} x^4} + \dots \right\} \end{aligned}$$

und setzen nun weiter

$$x=0, \quad y=0, \quad y'=0$$

als ein Lösungssystem der drei Gleichungen (31.) (32.) (33.) voraus, so wird im Nullpunkt

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} = 0$$

Wenn wir jetzt die Differentialgleichung (31.) allein auf sich beruhen lassen, so ist die Bedingung für die Existenz einer Tangentialebene

$$(1.) \quad F(x, y, y') = 0$$

oder von einer Curvengleichung

$$(34.) \quad \Phi(x, y, c) = 0$$

mit einem willkürlichen Parameter. sich ergibt, seien jetzt noch kurz die „im Allgemeinen“ eintretenden singulären Stellen eines durch (34.) definirten Systems zusammengestellt. Dabei machen wir für die Function Φ von x, y, c nunmehr dieselben Voraussetzungen, die wir bisher für die Function F von x, y, y' festgehalten haben.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$$

gibt wieder die „Discriminantencurve“. Deuten wir für $c = z$ wieder $\Phi(x, y, z) = 0$ als Fläche über der (x, y) -Ebene, so sind jetzt einfach die Horizontalschnitte derselben die Curven des Systems. Diese Horizontalschnitte durchschneiden im Allgemeinen die „Umrisscurve“ $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ auf der Fläche; in der Projection **berühren** sie die Projection der Umrisscurve, die Discriminantencurve.

Die auf der Discriminantencurve auftretenden singulären Stellen sind: Erstens diejenigen, welche durch das (den Gleichungen (7.) analoge) System:

$$(35.) \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + c \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

gegeben sind — für welche auf der Fläche $\Phi = 0$ ein Horizontalschnitt die Umrisscurve berührt; zweitens diejenigen Stellen, für welche (den Gleichungen (10.) analog) die Beziehungen:

$$(36.) \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2} = 0$$

statthaben, es sind die Spitzen der Discriminantencurve.

In der Projection auf die (x, y) -Ebene ist für die durch (35.) gegebenen Punkte die Berührung von Systemcurve und Discriminantencurve vierpunktig. — In der Umgebung der durch (36.) bezeichneten Spitzen der Discriminantencurve verhält sich das Curvensystem (wie Fig. V der Tafel IV darstellt) völlig allgemein; in jedem Punkt der Discriminantencurve, und so auch in der Spitze, berührt eine Curve des Systems, in der Spitze in Richtung der Spitzentangente.

Weiter aber bilden ausser diesen auf der Discriminantencurve gelegenen singulären Stellen noch die Punkte, für welche gleichzeitig

$$(37.) \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

statthat, singuläre Punkte unseres Curvensystems¹⁾. Es sind die Doppelpunkte der Systemcurven, die sich in isolirte und in Doppelpunkte mit 2 reellen Aesten trennen.

Stellt man nun die den Formeln (28.) und (29.) analogen Beziehungen zwischen den singulären Stellen eines solchen Systems und den zugehörigen Charakteristiken K und K_i derselben auf, so ist folgendes zu beachten:

Betrachten wir wieder die von den Curven des Systems einfach überdeckten Teilgebiete, welche sich über der Ebene (x, y) (beziehungsweise auf der Fläche $\Phi = 0$) durch die Discriminantencurve von einander trennen, so besitzt ein solches Gebiet einmal singuläre Stellen auf dem Rande.

1) Das gleichzeitige Bestehen der analogen Gleichungen

$$F' = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial y} = 0$$

für die Differentialgleichung (1) bezeichnet gewisse Wendepunkte des zugehörigen Curvensystems, also keine singulären Stellen in dem hier zu Grunde gelegten Sinne.

Durch einen beliebigen Punkt des Randes läuft eine Systemcurve; die durch die Gleichungen (35.) definirten singulären Stellen sind als Punkte $\overset{r}{\Pi}_2$ und $\overset{r}{\Pi}_0$ zu bezeichnen, indem nämlich an den Berührungsstellen einer Horizontalcurve mit der Umrisscurve in dem einen der beiden, durch die Umrisscurve getrennten Flächenteile zwei Curvenzweige verlaufen, in dem anderen keiner. — Die durch die Gleichungen (36.) definirten Punkte des Randes verhalten sich wie gewöhnliche Punkte des Randes, wie wir erkennen, wenn wir an Fig. V (Tafel IV) die Zerschneidung längs der Umrisscurve vornehmen, welche in Fig. 5 auf pag. 46 für den analogen Fall angedeutet ist. Es ist dann unmittelbar ersichtlich, dass vom singulären Punkte aus je eine Curve des Systems in die beiden dort getrennten Gebietsteile verläuft.

Im Innern der Gebiete sind dann weitere singuläre Punkte $\overset{i}{\Pi}_0$ und $\overset{i}{\Pi}_4$ vorhanden (wenn wir an der Bezeichnung des Index nach der Anzahl der von einem Punkt auslaufenden Aeste festhalten).

Für die Charakteristik K_i eines Flächenteiles ergibt sich sonach (aus der Annalen 32 pag. 501 gegebenen Formel) die folgende Beziehung zu den durch die Gleichungen (35.) und (37.) gegebenen singulären Stellen:

$$(38.) \quad K_i = \frac{1}{2} (\overset{r}{\pi}_0 - \overset{r}{\pi}_2) + (\overset{i}{\pi}_0 - \overset{i}{\pi}_4),$$

in welcher die $\overset{r}{\pi}_r, \overset{i}{\pi}_i$ die Anzahlen der betreffenden singulären Stellen bezeichnen.

Dehnt man die Formel über die ganze Fläche aus, so fallen hier auch noch die Stellen (35.) des Randes einfach heraus, weil stets eine Stelle $\overset{r}{\Pi}_0$ mit einer anderen $\overset{r}{\Pi}_2$ correspondirt und man erhält die bekannte Formel:

$$(39.) \quad K = \sigma_0 - \overset{i}{\sigma}_4.$$

Das Resultat des Vergleiches der für die eine und andere Definition eines Curvensystems „im Allgemeinen“ eintretenden singulären Stellen lässt sich der Hauptsache nach folgendermassen zusammenfassen:

Sehen wir ab von dem verschiedenen (aber stets „algebraischen“) Verhalten der Systeme längs der Discriminantencurve, die im einen Fall als Ort von Spitzen, im andern Fall als Ort der Berührungspunkte der Systemcurven erscheint; sehen wir ebenso ab von dem ebenfalls „algebraischen“ Character der Systemcurven in den Spitzen der Discriminantencurve, so kommt der wichtigste Unterschied der beiden Definitionen dadurch zum Ausdruck, dass die weiteren, im „Allgemeinen“ auftretenden singulären Stellen eines Curvensystems wesentlich singulär (transcendenter Natur) sind, wenn wir ausgehen von der Definition durch eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F'(x, y, y') = 0$$

dagegen ausserwesentlich singulär (algebraischer Natur), soferne eine Gleichung

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

mit einem Parameter zu Grunde gelegt wird, vorausgesetzt, dass den Funktionen F und Φ die Eingangs bezeichnete Eigenschaft, „algebraischer“ Natur zu sein, beigelegt wird.

Sitzung vom 7. Februar 1891.

1. Herr LEONHARD SOHNCKE legt eine Abhandlung des Herrn Dr. C. LUDWIG WEBER, Direktor der hiesigen elektrotechnischen Versuchsstation „zur Messung der magnetischen Inklination“ vor.

2. Herr AUREL VOSS hält einen Vortrag „über spezielle Differentialinvarianten in der Flächentheorie“. Derselbe soll anderweit veröffentlicht werden.

Zur Messung der magnetischen Inklination.

Von C. L. Weber.

(Eingelaufen 7. Februar.)

Unter den Elementen des Erdmagnetismus ist ohne Zweifel die Inklination dasjenige, dessen genaue Bestimmung noch die grössten Schwierigkeiten darbietet.

Obwohl die bestehenden Methoden im Laufe der Jahre wesentliche Verbesserungen erfahren haben, so genügen sie doch nicht allen Anforderungen und die Frage, welche von den bekannten Methoden die beste sei, ist keineswegs abgeschlossen. Bei diesem Stand der Dinge muss auch das Bestreben, neue Wege zu diesem Ziele aufzusuchen, gerechtfertigt erscheinen; und selbst, wenn hiebei kein Fortschritt sich ergeben sollte, so wäre doch eine kritische Discussion derjenigen Verfahren, die überhaupt möglich sind, eine wichtige Aufgabe; insoferne nämlich, als dadurch der Ueberblick über das ganze Problem erleichtert wird.

Von diesem Gedanken geleitet, habe ich vor 2 Jahren 3 neue Methoden beschrieben, die sich auf die Anwendung eines bisher zu diesem Zweck noch nicht benützten Princip gründen¹⁾. Dieses Princip scheint eine sehr grosse Zahl von Abänderungen zuzulassen, so dass sich im Anschluss an die 3 erwähnten noch eine ganze Reihe von mehr oder weniger ähnlichen Verfahren auffinden liess²⁾, von denen jedes als eine selbständige Methode betrachtet werden kann.

Obwohl nun eine vollständige und erschöpfende Discussion aller sich bietenden Möglichkeiten für die Beleuchtung des vorliegenden Problems von Werth wäre, so soll doch im Folgenden bloss eine dieser Methoden besprochen werden, die, wie mir scheint, vor vielen anderen gewisse Vortheile bietet. Einige Resultate, welche mit derselben erlangt worden sind, dürften diese Meinung bestätigen.

Grundgedanke.

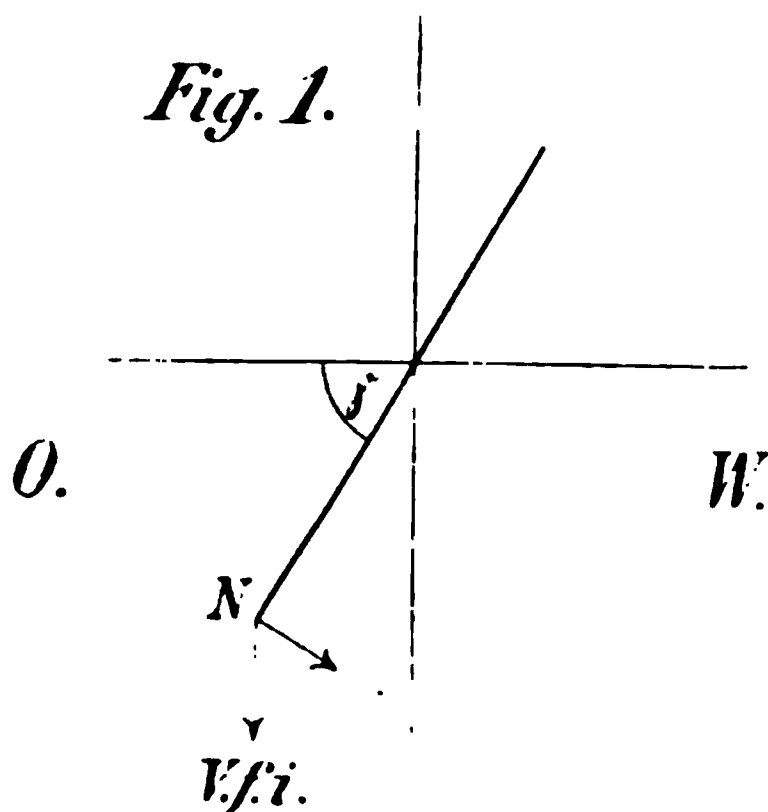
Dem neuen Verfahren liegt folgende Ueberlegung zu Grunde. Es sei gegeben ein Stromkreis, der um einen horizontalen Durchmesser als Axe (Schneide etc.) leicht beweglich ist. Es sei der Schwerpunkt so gelegen, dass die magnetische Axe des Kreises in der Ruhelage, die er ohne Strom, unter dem Einfluss der Schwere einnimmt, einen Winkel γ mit der Horizontalen macht, der etwas grösser ist als die Inklination.

Liegt die Schwingungsebene senkrecht zum magnetischen Meridian, und durchläuft ein Strom den Kreis in solcher Richtung, dass an dem nach unten zeigenden Ende der magnetischen Axe ein Nordpol entsteht, so tritt ein Drehmoment auf von der Grösse:

$$V \cdot f \cdot i \cos \gamma$$

1) C. L. Weber. Wied. Ann. 35. p. 810. 1888.

2) Siehe auch: Tageblatt der 61. Naturforscher-Versammlung zu Köln. 1888. p. 14.

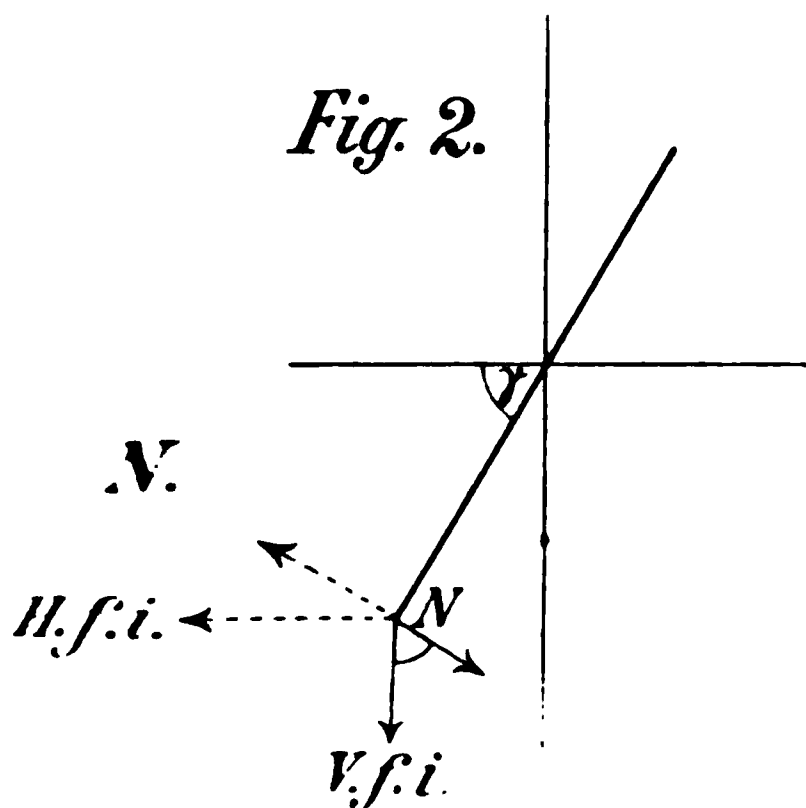


wo V die Vertical-Intensität, f die Windungsfläche, i die Stromstärke, γ den erwähnten Winkel bezeichnet.

Liegt derselbe bewegliche Stromkreis mit seiner Schwingungsebene im Meridian, so tritt zu diesem Drehmoment noch ein zweites hinzu, herrührend von der Horizontalcomponente H und von der Grösse:

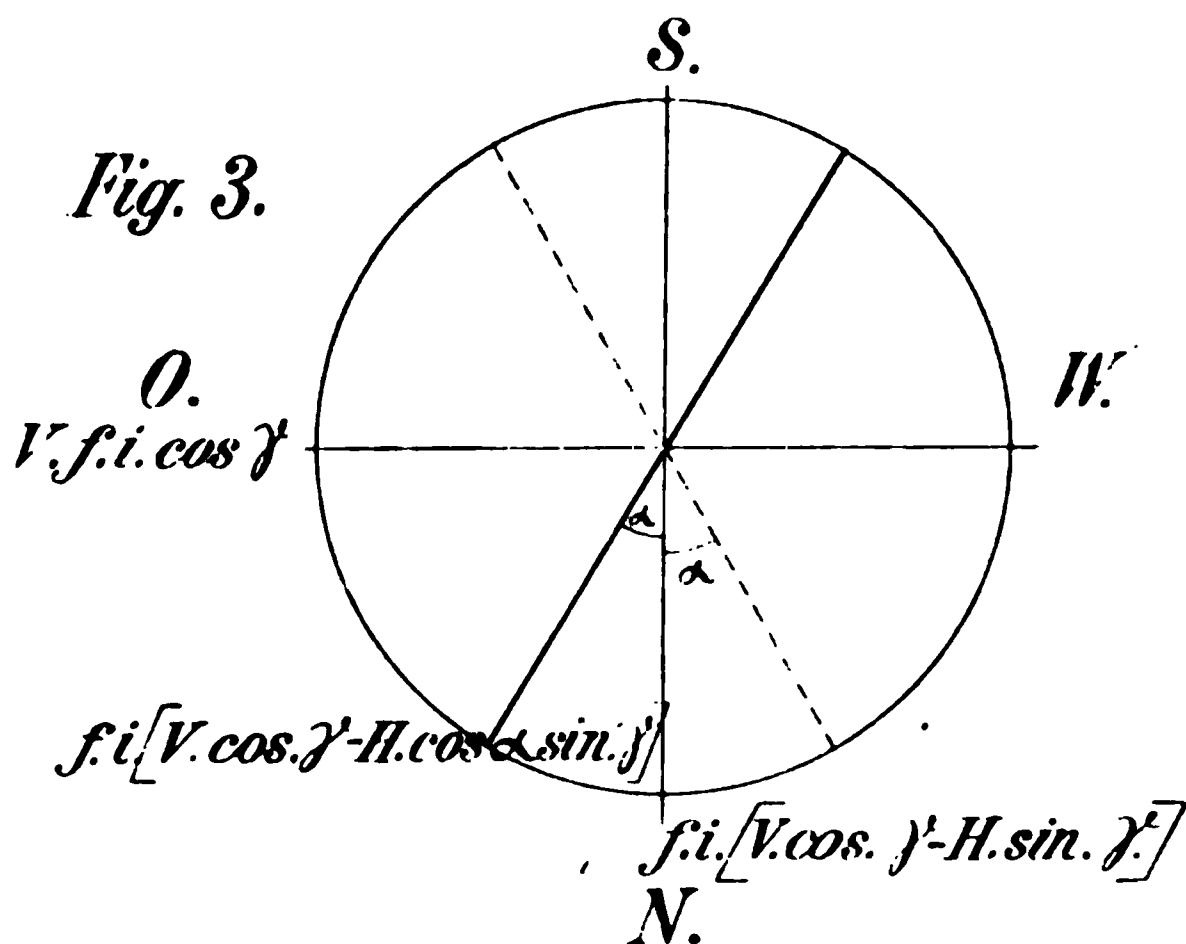
$$\pm H \cdot f \cdot i \cdot \sin \gamma$$

Wenn das zum Nordpol gewordene Ende der magnetischen Axe gegen Norden geneigt ist, so subtrahiren sich beide Momente.



Dreht man jetzt die gedachte Vorrichtung um eine verticale Axe, so dass die Schwingungsebene allmählig von der Nord-Süd-nach der Ost-West-Richtung übergeht, so bleibt in allen Zwischenlagen das von der Vertical-Componente herrührende Drehmoment

in ungeänderter Grösse erhalten; das von der Horizontalcomponente herrührende dagegen hat in einer Zwischenlage, die um den $\angle \alpha$ von der Nord-Süd-Richtung abweicht, nur noch die Grösse: $H f i \sin \gamma \cdot \cos \alpha$.



Das gesammte Moment ist also in dieser Lage

$$R = V f i \cos \gamma - H f i \sin \gamma \cos \alpha$$

Ist γ so gewählt, dass $V f i \cos \gamma < H f i \sin \gamma$; ist also γ grösser als die Inklination, so ist es offenbar möglich, einen $\angle \alpha$ zu finden, so dass

$$R = 0 \quad \text{wird.}$$

In dieser Lage wird also beim Durchlaufen des Stromes durch den Kreis kein Drehmoment auftreten; der im stromlosen Zustand in einer bestimmten Ruhelage befindliche Kreis wird beim Schliessen des Stromes keinen Ausschlag geben. Man hat:

$$V \cdot f i \cdot \cos \gamma = H \cdot f i \cdot \sin \gamma \cos \alpha \quad \text{also:}$$

$$\frac{V}{H} = \tan \gamma \cdot \cos \alpha = \tan I.$$

Man findet also die Inklination I , wenn es möglich ist, die Winkel γ und α zu messen.

Man erkennt sofort, dass dieser Weg gewisse Vortheile bietet: Stromstärke und Windungsfläche braucht man nicht

zeug betrachtet werden. Es wurde aus dem früher¹⁾ beschriebenen Apparat hergestellt durch Entfernung des Wagebalkens und Zufügung eines Horizontalkreises. Mit der verticalen Tragsäule wurden Fernrohr und Scala fest verbunden.

Es besteht demnach aus folgenden Theilen. Ein Dreifuss mit Stellschrauben trägt eine in konischem Zapfenlager drehbare verticale Säule. Mit derselben dreht sich ein Theilkreis, dessen Nonien am Dreifusse befestigt sind. Auf dem oberen Ende der Säule befinden sich isolirt zwei Iridiumplatten als Lager für die Schneiden des Stromkreises. Dieser hat circa 10 cm Radius und circa 500 Windungen. Mit Hilfe einiger radial angeordneter Streben ist er an einem nahe quadratischen Messingrahmen befestigt, der auf seiner inneren oberen Seite die Schneide trägt; letztere ist aus Iridium gefertigt, vom Rahmen isolirt und um den Strom zu- und abzuführen, in 2 Theile getrennt, die durch dünne Drähte mit den Windungen in Verbindung stehen. Die Stromzuführung geschieht also mit Hilfe der Lagerplatten durch die Schneide, was sich über Erwarten gut bewährt.

Zum Beobachten und Justiren sind am Stromkreis 2 Spiegel angebracht. Der eine (I) ist nahe den Schneiden befestigt und steht in der Ruhelage nahezu vertical; er dient zur Beobachtung der Schwingungen; der zweite ist mit den Windungen (resp. dem Rahmen derselben) fest verbunden; seine Ebene wird parallel der Windungsebene justirt. Beide können mit 3 Schrauben und Spiralfedern beliebig justirt werden.

Das Fernrohr ist mit Hilfe eines ausladenden, versteiften Armes an der verticalen Säule befestigt und trägt eine kurze Scala in circa 0,25 m Abstand vom Spiegel I.

Zu dieser Einrichtung kommt noch eine Arretirungsvorrichtung hinzu und endlich ein Schutzkasten gegen Luftströmungen (bei meinen Versuchen aus Pappe).

1) l. c.

leicht genau zu machen, besonders wenn beide Spiegel nahe neben- oder übereinander sind, und es gibt dann die Normale zu Spiegel II genau die Richtung der magnetischen Axe des Stromkreises an; seine Ebene ist parallel der mittleren Windungsebene.

Ad 2) hat man nun den Winkel zwischen Spiegel I und II zu messen. Dies geschieht genau so, wie man den brechenden Winkel eines Prismas auf dem Goniometer bestimmt; die dazu nöthige Aufstellung ist nach Obigem schon geschehen.

Ad 3). Setzt man den Stromkreis wieder auf seine Unterlage und neigt ihn durch passende Belastung so lange, bis man in einem horizontal gestellten Fernrohr (Nivellirinstrument, Kathetometer oder Beobachtungsfernrohr selbst) das vom Spiegel I reflectirte Fadenkreuz mit dem Fadenkreuz selbst zur Deckung gebracht hat; oder bis das Spiegelbild einer mit dem Nivellirfernrohr in gleicher Höhe befindlichen Marke am Fadenkreuz erscheint. Alsdann liest man am Ablesefernrohr den eintretenden Theilstrich der Scala ab. In dieser Lage gibt dann der sub 2) gemessene Winkel direkt die Neigung (γ) der magnetischen Axe des Stromkreises an. Für eine andere Ruhelage ergibt sich der jedesmalige Winkel γ aus der betreffenden Scalenablesung mit Hülfe des Abstands von Spiegel und Scala.

Es ist leicht möglich, das Instrument so einzurichten, dass alle diese Justirungen an ihm selbst ausgeführt werden können: da es ja den Hauptbestandtheil eines Goniometers: vermontalen Theilkreis und Beobachtungsfernrohr bereits besitzt.

Es ist wichtig zu wissen, dass diese Justirung, beziehungsweise andere Theile derselben, auch auf andere Art ausgeführt werden können. Um z. B. die beiden Spiegel genau parallel der Normalen zu stellen, kann man einen kleinen Hölzchen, aus dem Hohlraum eines Bleizes. Man

Man stellt nun zunächst die Schwingungsebene des Instrumentes ungefähr in den Meridian und probirt, ob beim Stromschluss in einer bestimmten Richtung der bewegliche Kreis nach grösseren oder nach kleineren Scalentheilen ausschlägt. Hierauf dreht man die Schwingungsebene um ein grosses Stück — etwa 20° — nach einer Seite z. B. nach Ost, bis der Ausschlag nach der entgegengesetzten Richtung erfolgt; darauf wird nach Massgabe der erfolgten Ablenkung zurückgedreht und so fort, bis man das Azimuth, dem der Ausschlag 0 zugehört, in ein Intervall von 10 bis 5 Minuten eingeschlossen hat; die zuletzt beobachtete Ruhelage wird ebenfalls notirt.

Nun erfolgt ein zweiter Satz von Probееinstellungen auf der anderen Seite, also westlich; darauf wird die Nullstellung östlich wiederholt und so weiter, wobei man in der Regel eine allmähliche Verschiebung in der Ruhelage, also eine Veränderung des Winkels γ bemerkt, weshalb auch die einzelnen, auf derselben Seite abgelesenen Azimuthe nicht die gleichen sind. Das Auffinden der einzelnen Azimuthe erfolgt, nachdem die beiden ersten festgelegt sind, in der Regel mit 3 bis 5 Einstellungen; um die Empfindlichkeit zu vergrössern, kann man die Stromimpulse multipliciren, andererseits dämpfen.

Die weitere Behandlung der Ablesungen erläutert sich am besten an der Hand eines Beispielen. Man hatte durch die vorausgegangene Justirung ermittelt, dass für eine bestimmte Ruhelage, bei welcher die Ablesung am Beobachtungsfernrohr den Scalentheil: 82,7 ergab, der Winkel γ die Grösse hatte: $66^\circ 36' 24''$.

In der Zeit von 3^h 25 bis 4^h 6' am 23./7. 90 wurden die dem Ausschlag Null entsprechenden Azimuthe abwechselnd in Ost und West nebst den zugehörigen Ruhelagen in folgender Weise beobachtet:

Resultate.

Zur weiteren Kennzeichnung des Verfahrens sollen noch einige Beobachtungsreihen mitgetheilt werden, wobei nochmals betont sei, dass die absoluten Werthe durch Localeinflüsse fehlerhaft sind.

Datum: 14. VII. 2 ^h 45' — 4 ^h 0'			Datum: 16. VII. 9 ^h 25' — 10 ^h 18'		
α	γ	I	α	γ	I
16° 16',5	66° 35' 38"	65° 43' 36"	16° 20'	66° 35' 33"	65° 43' 16"
16° 13',5	66° 35' 8"	43' 29"	16° 8'	34' 42"	43' 37"
16° 5'	66° 34' 17"	43' 32"	15° 47'	32' 35"	43' 42"
16° 56',5	66° 33' 26"	43' 36"	15° 44'	31' 44"	43' 11"
15° 54'	66° 33' 1"	43' 27"	15° 24'	29' 37"	43' 2"
	Mittel:	65° 43' 32"	15° 16'	27' 55"	42' 14"
				Mittel:	65° 43' 10"

Datum: 16. VII. 2 ^h 0' — 2 ^h 55'			Datum: 18. VII. 10 ^h — 10 ^h 40'		
α	γ	I	α	γ	I
15° 54'	66° 30' 28"	65° 40' 48"	15° 28',7	66° 26' 21"	65° 41' 18"
15° 37',5	28' 35"	40' 36"	15° 31',2	28' 46"	41' 28"
15° 35',7	29' 14"	41' 12"	15° 18',7	26' 39"	40' 34"
15° 32',5	28' 21"	40' 53"	15° 21',2	27' 5"	40' 44"
15° 26'	27' 30"	40' 40"	15° 18',7	26' 39"	40' 34"
15° 12'	26' 13"	40' 48"	15° 10'	25' 23"	40' 9"
	Mittel:	65° 40' 49"		Mittel:	65° 40' 48"

Diese Zahlen zeigen, dass mit dem neuen Verfahren selbst unter ungünstigen Verhältnissen Resultate erzielt werden, die concurriren können mit den besten bisher verwendeten Methoden (Scherings und Wilds geneigter Erdinductor). Ein grosser Vorzug des Verfahrens dürfte darin liegen, dass man unabhängig wird von einer besonderen Bestimmung des magnetischen Meridians und der Variationen in Deklination. Man erhält vielmehr zugleich mit der Inklinationmessung auch eine Festlegung des Meridians. Ein weiterer Vorthail liegt darin, dass man, wie beim Nadelinklinatorium, nur ein

Schluss.

Da ich die beschriebene Methode nicht als etwas vollständig Fertiges, sondern blos als einen Vorschlag, als eine Studie betrachte, deren weitere Ausarbeitung Anderen oder wenigstens einer gelegeneren Zeit überlassen sein möge, so habe ich auch von einer ausführlicheren Diskussion derselben abgesehen und möchte nur anhangsweise einige Gesichtspunkte nach dieser Richtung hin entwickeln.

Betrachtet man in der Formel:

$$x = tg I = tg \gamma \cdot \cos \alpha$$

den Winkel γ als vollständig bestimmt, so ergibt die Differentialgleichung:

$$\frac{d x}{d \alpha} = - tg \gamma \cdot \sin \alpha;$$

dass die Bestimmung von x mit Hilfe von α um so genauer wird, je kleiner α ist, je mehr sich also γ dem wahren Werthe der Inklinatıon nähert, wie man auch von vorneherein einsieht.

Man könnte auf Grund dieser Verhältnisse glauben, dass es besser sei, den Winkel α überhaupt nahezu gleich Null zu machen, d. h. blos im Meridian zu beobachten und nur γ so lange zu ändern, bis es mit I übereinstimmt, d. h. die schwingende Windungsfläche so lange durch zugefügte Belastungen zu neigen, bis ihre Axe genau mit der Inklinatıon übereinstimmt, alsdann wird auch der Ausschlag Null beobachtet.

Ich halte dies Verfahren aber nicht für vortheilhaft; denn abgesehen davon, dass dies eine besondere Meridianbestimmung voraussetzt, wird man doch über die Grösse der möglicherweise vorhandenen Abweichung vom Meridian Aufschluss suchen müssen und zu diesem Zwecke um die verticale Axe drehen.

Bringt man aber willkürlich messbare Veränderungen in γ hervor und bestimmt für die neue Neigung $(\gamma + \delta)$ den zugehörigen Einstellungswinkel α_1 , so kann man diese zweite Beobachtung mit der ersten (γ, α) combiniren und es ergibt sich so eine Abänderung des Verfahrens, bei der die directe Messung des Winkel γ ganz umgangen und durch die Beobachtung seiner Veränderung δ ersetzt wird.

Man erhält nämlich aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} I &= \operatorname{tg} \gamma \cos \alpha = \operatorname{tg} (\gamma + \delta) \cos \alpha_1 \\ &= \frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta} \cos \alpha_1 \end{aligned}$$

die weitere

$$\operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\operatorname{tg} \delta \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha}$$

woraus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \delta \left(1 - \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \delta \left(1 - \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha} \right)^2 + \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha}} \end{aligned}$$

Man kann also γ aus δ , α und α_1 berechnen und aus diesem Werthe die Inklination bestimmen.

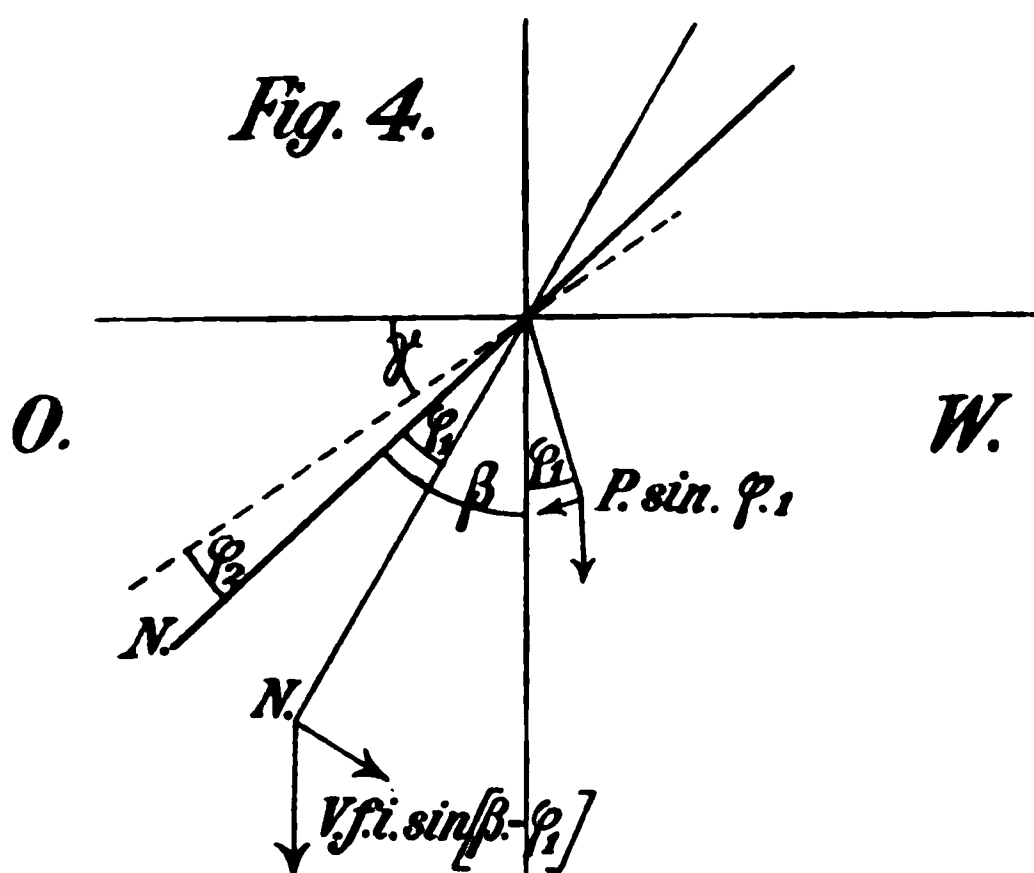
Um die directe Bestimmung des Winkels γ zu umgehen, kann man endlich einen zweiten Weg einschlagen, der sich mit derselben Anordnung des Apparates durchführen lässt, aber nicht mehr auf eine Nullmethode führt, sondern die Beobachtung von Ablenkungswinkeln nöthigt macht¹⁾.

Hat man nämlich östlich und westlich vom Meridian beobachtet und damit die Grösse α und die Lage des Meridians bestimmt, so kann man die Neigung γ finden, indem

¹⁾ Eine diesbezügliche Andeutung findet sich bereits in einer früheren Abhandlung: C. L. Weber: *Wiedem* 35. p. 816. 1888 und ein darauf gegründetes selbständiges Verfahren: *Tageblatt der 61. Naturforscher-Versammlung zu Köln, 1888. p. 14. unter IV.*

man in der nun bekannten Ost-West-Ebene die beim Schliessen des Stromes in 2 verschiedenen Richtungen auftretenden Ablenkungen ermittelt.

In dieser Lage (Schwingungsebene Ost-West) entstehen beim Stromschluss zwei Drehmomente: von Seite der Verticalintensität und von Seiten der Schwere. Erstere sucht die Axe vertical zu stellen und dreht so lange, bis das von der Schwere ausgeübte Moment ihr Gleichgewicht hält. Ist in der Ruhelage die Neigung der Axe des Stromkreises gegen



die Verticale $= \beta = 90 - \gamma$, während der Schwerpunkt genau vertical unter der Drehaxe liegt, so gilt für eine Ablenkung φ_1 , die durch Stromschluss in einer bestimmten Richtung hervorgebracht wird, die Gleichung:

$$V \cdot f i \cdot \sin (\beta - \varphi_1) = P \cdot \sin \varphi_1 ;$$

schliesst man den Strom in umgekehrter Richtung, so ergibt sich ein Ausschlag φ_2 nach der entgegengesetzten Seite, so dass

$$V \cdot f i \sin (\beta + \varphi_2) = P \cdot \sin \varphi_2$$

worin P die Masse des beweglichen Theiles multipliziert mit

den Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehaxe. Aus beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{\sin (\beta - \varphi_1)}{\sin (\beta + \varphi_2)} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}$$

oder

$$\sin \beta \operatorname{ctg} \varphi_1 - \cos \beta = \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi_2 + \cos \beta$$

oder

$$\operatorname{tg} \beta \cdot (\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_2) = 2$$

also

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_2} = 2 \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)} = \operatorname{ctg} \gamma$$

so dass also γ aus den beiden Ablenkungen: φ_1 und φ_2 ermittelt werden kann.

Obgleich von diesen indirecten Bestimmungen von γ nicht jene Genauigkeit erwartet werden kann, wie von einer directen Ausmessung, so sind sie doch als Controllen von Werth, zumal da sie sich mit dem für die vorgeschlagene Methode adjustirten Instrument ohne Weiteres ausführen lassen.

Anspruch auf Vollständigkeit nicht machen können und wollen, so haben sie doch zu einigen Ergebnissen geführt, welche für eine spätere eingehendere Erforschung dieser Gegend von Nutzen sein können und wenigstens über die Quellenverhältnisse nähere Aufschlüsse zu geben geeignet scheinen. Sie sind deshalb in dem Folgenden kurz zusammengestellt.

Die Thermen von Bormio treten am Südrande des gewaltigen Kalkstocks der Ortlergruppe da zu Tage, wo die Kalkschichten dieses Gebirgsmassivs auf einem thonig-schiefrigen, impermeablen Fundamente aufruhend und der ganze mächtige Gebirgsstock von einer tief einschneidenden Querbucht, nämlich jener der Adda, bis unter diese Unterlage durchbrochen ist. Zwar kommen die Hauptquellen jetzt nicht auf der tiefsten Thalsole der Addaschlucht zum Vorschein, wie man folgern könnte, wenn man den Ursprungsort der Quellen mit dem Thaleinschnitt in unmittelbar genetischem Zusammenhange sich dächte, sondern sie brechen 80—100 m höher an dem Berggehänge zu Tage aus. Dies hat jedoch seinen Grund in dem Umstande, dass der grossartige Gebirgseinschnitt, der von Bormio bis auf die Passhöhe des Stilsers Jochs emporzieht, da, wo jetzt die Hauptquellen bei dem alten Bade ausfliessen, in früherer, wie sich nachweisen lässt, diluvialer Zeit, nicht bis zur jetzigen Thalsole, sondern nur bis etwa zur Höhe des alten Bades eingetieft war, so dass die Quellen zur Zeit ihrer vermuthlich ersten Entstehung allerdings auf der damals tiefsten Einbuchtung ihren Ausfluss sich verschafft haben, den sie dann auch später und bis jetzt als den bereits gebahnten und die geringsten Widerstände bietenden Weg beibehalten haben. Dass die Quellen bereits in sehr früher Zeit auf beträchtlicher Höhe ausgeflossen sind, das deutet die mächtige, wahrscheinlich diluviale Conglomeratbildung an, deren durch eine dem jetzigen Quellenabsatz entsprechende Kalksinter-

steinsspalte und fliesst, Dampf wolken bildend, durch ein Gerinne und über die mit einer weissen und z. Th. gelben Sinterkruste überzogenen Felsen unbenützt ab. Sie soll eine Temperatur von 39° C. besitzen und 1,7 Sekundenliter Wasser liefern. Die zur Trinkkur benützte Pliniusquelle kommt etwas tiefer am Thalgehänge aus einer deutlichen Felsenspalte mit $38,3^{\circ}$ C. (nach meinen öfteren Messungen) und 1,9 Sekundenliter Erguss zu Tag.

Eigenartig ist die sog. Augenquelle (St. Carlsquelle) wegen ihres ockerigen Absatzes; sie liefert nur lauwarmes Wasser, das wohl als eine im Geröll abzweigende und bei dem Durchfliessen durch letzteres mit Eisencarbonat angereicherte Ader der Hauptquellen anzusehen ist. Entfernter von diesen Hauptquellpunkten am Steilgehänge der Addaschlucht entspringen noch zwei grössere Thermen, die sog. innere Ostgothen- und die Nibelungenquelle. Uebrigens beobachtete ich in der ganzen Umgebung des alten Bades an sehr zahlreichen Stellen Quellen, welche einen gegen die Lufttemperatur erhöhten Wärmegrad erkennen liessen und gleichfalls als Thermen oder Abzweigungen von solchen gelten müssen. Das wird auch durch die an den Felsen der ganzen Umgegend beobachteten Vorkommen von Salzausblühungen bestätigt, welche, wie Untersuchungen gelehrt haben, fast rein aus Bittersalz mit nur geringer Beimengung von Glauber- und Kochsalz bestehen. Ueberhaupt scheint mir das ganze Erdreich an diesem Gehänge weit und breit erwärmt zu sein, wodurch die ungewöhnlich üppige Vegetation in dieser Gegend ihre Erklärung findet.

Zusammenfassende Messungen des Ergusses aller Quellen liegen nicht vor. Der Schätzung nach mag derselbe 18—20 Sekundenliter und die mittlere Temperatur $38—39^{\circ}$ C. betragen.

Was die chemische Zusammensetzung des Mineralwassers anbelangt, so zeichnet sich dieselbe durch das Vorwalten der Sulphate neben beträchtlichen Mengen von Kalkcarbonaten

	Plinius- quelle	Ostgothen- quelle
Kalkcarbonat	0,1288	0,1429
Magnesiumcarbonat	0,0038	0,0019
Kieselsäure	0,0164	0,0062
Thonerde	0,0137	0,0042
Phosphors., Mangan etc.	Spuren	Spuren
Eisenoxyd	0,0005	0,0009
	0,9375	0,9124

Es ergiebt sich daraus im Vergleich zu dem Gehalte der Martinsquelle, dass ein bemerkenswerther Unterschied nicht besteht, um so weniger, wenn man die gegenwärtige Beschaffenheit der letzteren in Rechnung zieht. Nach meiner Untersuchung liefert die Martinsquelle jetzt 0,973 gr bei 110° C. getrockneten Rückstand in 1 Liter mit 0,07334 MgO und 0,4206 SO₃; die Quelle des römischen Bades unter gleichen Verhältnissen 0,8650 gr Trockenrückstand mit 0,0568 MgO und 0,5070 SO₃ neben 0,0025 Cl. Die Augenquelle endlich ergab 0,9740 gr Trockenrückstand mit einem bemerkenswerth-hohen Gehalt an Eisenoxyd, nämlich 0,0100 gr. Als Hauptbestandtheile der verschiedenen Quellen erweisen sich demnach mit grosser Uebereinstimmung Gyps, Bittersalz, Glaubersalz und Kalkcarbonat, Salze, welche die aus Gypsstöcken kommenden Wasser gewöhnlich zu enthalten pflegen, wie z. B. jene von Leuk in der Schweiz. Auch die Quellen von Bormio entnehmen ihren Mineralgehalt unzweifelhaft einer Gypsablagerung, wie wir später ausführlicher erörtern werden. Auffallend ist dabei der geringe Gehalt an Chlornatrium, was eine Armuth oder einen Mangel an Steinsalz in dem betreffenden Gypsstock andeutet. Noch auffallender ist das fast gänzliche Fehlen von Schwefelwasserstoff sowohl in dem Quellwasser selbst, wie auch in den mit aufsteigenden Gasen. v. Planta¹⁾ konnte nur quantitativ unbestimmbare Spuren

1) v. Planta a. a. O. S. 15.

Mineralwassers im Behälter sich eine Umsetzung von Bittersalz und Kalkcarbonat vollzogen zu haben.

Im Verhältnisse zu dem Gehalt der Quellen an Kalkcarbonat ist die Sinterbildung, namentlich da, wo das Wasser vertheilt über die Felsen abfließt, eine sehr beträchtliche. Neugebildete derartige rosenroth und saftgrün gefärbte Absätze sind so innig mit Algen¹⁾ durchwebt, dass sie sich wie Lappen abheben lassen, während die älteren Sinterkrusten mehr oder weniger arm an organischen Beimengungen sind. Die röthliche Färbung wird vorzugsweise durch *Leptothrix dictyothrix*, und *Scytonema Bormiense*. die grüne hauptsächlich durch *Aphanocapsa thermalis*, *Chroococcus membraninus*, *Lyngbya conglutinata*, *Chthonoblastus Plantae*, *Phormidium Lyngbyanum* u. s. w. verursacht. Die Zusammensetzung eines solchen beim Austrocknen lederartigen neugebildeten Lappens (nach einer Analyse von Herrn A. Schwager) (I) und die einer alten Sinterkruste (II) ist folgende:

	I.	II.
Kalkcarbonat	83,44	92,80
Bittererdecarbonat	1,22	1,14
Kalksulphat	3,18	1,31
Kali	0,12	} Sp.
Natron	0,12	
Thonerde	1,63	} 3,50
Manganhaltiges Eisenoxyd	0,72	
Kieselerde	0,92	
Organisches (und Wasser)	8,61	1,25
	99,96	100,00

Bei dem Reichthum der Quellen an gelöstem Kalksulphat ist die Ausscheidung von Gyps eine verhältnissmässig geringe; das Kalkcarbonat aber scheidet sich rasch und in

1) Vgl. Brügger in Jahresb. d. Naturforsch. Ges. Graubündens, N. F. VIII, 1863. S. 241.

scheint von der Zersetzung des Arsenkieses herzurühren, welcher in dem von dem Mineralwasser durchzogenen Schichtgestein vorkommt.

Wenn wir nun weiter nach den Ursachen der Entstehung und des Gehaltes der Quellen von Bormio fragen, so können uns nur die geologischen Verhältnisse dieser Gegend Anhaltspunkte für die Beantwortung geben. Wir werden daher darauf hingewiesen, zunächst einen Blick auf den geologischen Bau der Umgebung des Bades, und da diese nur einen kleinen Theil des grossen Gebirgsstocks der Ortlergruppe ausmacht, auf jenen der letzteren selbst zu werfen.¹⁾

Der Graubündener Kalkzug im Allgemeinen.

Die durch die Höhe (3905 m), Massenhaftigkeit, grossartige Wildheit seiner Felswände und die beträchtliche Ausbreitung der Gletscher berühmte Gruppe des Ortlergebirges verdankt diese Eigenartigkeit, welche sie vor fast allen Hochalpenstöcken auszeichnet, wesentlich der Entwicklung der Kalkschichten, die seine Hauptmasse ausmachen. Während wir sonst in den Centralketten der Alpen nur ältere krystallinische Bildungen zu finden gewohnt sind, sehen wir den Ortler als ein jüngeres Kalkgebirge über den Urgebirgsbildungen ausgebreitet mitten im Centralstock mächtig

1) Vgl. Leonhardi, Das Veltlin, 1860; Ch. G. Brügger, Ost-rhaetische Studien, 1863; Theobald, Das Bündner Münsterthal im Jahresber. d. Naturf. Ges. Graubündens, N. F. VIII, 1863. S. 53; Theobald, Geol. Beschreibung von Graubünden 1864, und 2. Theil, 1866; Ders. und J. J. Weilenmann, Die Bäder von Bormio (ohne Jahreszahl); Theobald, Bormio u. s. Bäder, Chur 1865; Dr. C. Meyer, Ahrens und Ch. G. Brügger, Die Thermen von Bormio, 1869; G. Stache im Jahrb. d. k. k. geol. Reichs. 1877. S. 162; Stache und C. v. John, Geolog. u. petrog. Beiträge das. 1879. S. 318; Stache, in Verh. d. geol. Reichs. 1873, 222; Ders. das. 1878, 174; v. Mojsisovics, Geolog. Bedeut. d. Rheinlinie im Jahrb. d. geolog. Reichs. 1873, 152.

Gleichwohl ist es trotz der beträchtlichen Mächtigkeit dieser Kalkschichten, welche sich hier auf dem langen Zug von Chur bis zur Königsspitze entwickelt zeigen und trotz der nicht zu verkennenden reichen Gliederung des Schichtenbaues bis jetzt noch in geringem Grade geglückt, befriedigende Resultate in Bezug auf Gliederung und Gleichstellung der unterscheidbaren Stufen mit denen der Kalkgebilde einer der Nebenzonen zu gewinnen. Es rührt dies hauptsächlich von der trostlosen Armuth der Schichten an organischen Einschlüssen und von der eigenthümlichen, durch fast alle Schichten hindurch gleich bleibenden Gesteinsbeschaffenheit her, welche den Vergleich mit den Gliedern der zunächst benachbarten Kalkablagerungen erschweren.

Zwar hat der bewunderungswürdig fleissige und un-nachahmbar eifrige Theobald,¹⁾ welcher, wie kein anderer Geologe, diese Gebirge genau durchforscht hat, die Grenzen festgelegt, innerhalb welcher die mächtigen Kalkmassen dieses Gebiets in das System einzureihen sind, nämlich zwischen den alpinen Muschelkalk und den *Belemniten* führenden Liasschiefer, im Einzelnen aber hat er diese einzuschaltende Glieder zu schematisch mit den in den benachbarten Kalkalpen unterschiedenen Abtheilungen der Trias in Parallele gestellt, ohne für eine derartige in's Einzelne gehende Eintheilung immer genügende Anhaltspunkte durch Versteinerungen gewonnen zu haben. Indem er sich vornehmlich nur auf die Gesteinsbeschaffenheit und die Lagerungsverhältnisse stützt, gelangt er für den Graubündener Kalkzug zu nachstehender Reihenfolge der Schichten in absteigender Ordnung:

1. Im Hangenden: Lias (Steinsbergkalk und Algäuschiefer).
2. Rhätische Stufe (Kössener Schichten).

1) Beiträge z. geol. Karte der Schweiz, III. Abth. Bl. XX, 1866.

der Muschelkalk wurde an charakteristischen Versteinerungen sowohl bei Tarasp, als im Chiamuera-Thale erkannt. Etwas höher liegen dünngeschichtete, schwarze Mergelschiefer mit Fischechuppen, *Bacryllien* und *Ostracoden*, welche gleichfalls einer bestimmten Stufe zu entsprechen scheinen. Ferner fand ich in einem hellgrauen, durch Verwitterung gelblich gefärbten Mergel in der Nähe des Passes Sür Som zwischen Zernetz und Münster zahlreiche Versteinerungen vom Typus jene der Raibler Schichten. Es deutet dies an, dass trotz der Armuth an organischen Ueberresten innerhalb mächtiger Schichtencomplexe durch eine sehr genaue Untersuchung des Gebiets Anhaltspunkte zu einer schärferen Gliederung sich wohl gewinnen lassen.

Was die den Muschelkalk unterlagernden Bildungen anbelangt, so glaube ich mich durch eine ausgedehnte Untersuchung dieser Grenzsichten vom Davoser Thal an über Filisur nach Bellaluna und dem Stulser Thal, dann bei Ponte im Engadin, bei Tarasp, insbesondere im Ofen-Passthal überzeugt zu haben, dass die von Theobald im Verrucano zusammengefassten graubraunen Schiefer und rostischen Quarzite, welche stellenweise in ein Augengneiss-ähnliches Gestein und in Sericitschiefer verlaufen, stellenweise durch ächte Conglomerate und rothe Sandsteine mit zwischengelagerten grünlichen und röthlichen Schiefern ersetzt werden und stets concordant unter dem schwarzen Kalke ihre Stelle einnehmen, den Werfener Schichten bzw. dem alpinen Buntsandstein entsprechen. Man vergleiche nur die hierhergehörigen Schichten bei Werfen selbst und zwischen Bischofshofen und Mitterberg mit jenen im Samina-Thale bei Vaduz am östlichen Rheinthalande, mit den Felsen, worauf Filisur steht, mit den Schichten im Eingang des Chiamuera-Thales bei Ponte, mit dem Sandstein des Ofen-Passes bei Ilg Fuorn oder im Spöl-Thale bei Livigno und endlich mit den *Myophoria costata* einschliessenden, petrographisch gleichen

zwischen den kalkig dolomitischen Gebirgsgliedern und der Schieferunterlage verläuft auf der Südseite von Livigno her am Fusse der Cima di Plator und des Mt. della Scala zum alten Bad Bormio in fast genau W-O-Richtung. Auf dieser Strecke begegnen wir Aufschlüssen an dem alten Passübergang unterhalb den beiden Wachtthürmen (Pass la Scala) und längs dem nach Bormio führenden Wege namentlich in den Wasserrissen oberhalb der einzelstehenden Kirche zwischen Premadio und Torripiano. In der Addaschlucht selbst und an den Felsen, aus welchen die Thermen von Bormio hervorbrechen, verdecken mächtige Lagen von Gehängeschutt und zum Theil ältere Diluvial-Conglomeratbänke die Grenzregion bis auf einzelne, aus der Ueberdeckung aufragende Felsenköpfe. Eine ähnliche Schuttmasse verbreitet sich auch weiter ostwärts am Fusse der Kalkwände des Mt. Cristallo über das nördliche Gehänge von Valle del Zebbru, in dem nur durch einzelne tief einschneidende wilde Schluchten wie Val Campello, V. d'Uzza und mehrere unbenannte Gräben bis zum Val Marmotta und dem Zebbrugletscher anstehendes Gestein blossgelegt und der Beobachtung zugänglich wird. Daraus erkennt man, dass die Grenze zwischen Kalk- und Schiefergebirge unter der Wand des Mt. Cristallo von einer Einsattelung des Dosso Reit gegen Casa del Zebbru streicht und der Thalsole bei Prato Beghino und der Alphütte Il Pastore ganz nahe kommt, um von da an über das Königsjoch oder über Passo Cedek zum Suldenthal hin über zu biegen. Die Königswand und die Felsschroffen an der Königsspitze bestehen aus Kalk- und Dolomitschichten, das Schrötterhorn aus krystallinischem Schiefergestein, dazwischen verläuft die Gebirgsscheide durch einen oder den anderen der genannten Pässe. So viel sich aus der Ferne beurtheilen lässt, besteht die Kreilspitze auch aus Kalk, sodass die Gesteinsgrenze auf den Cedekpass treffen würde. Doch ist dies noch genauer zu ermitteln.

Im Grossen und Ganzen bemerkt man auf dieser langen Grenzlinie — einzelne Strecken, namentlich an Verwerfungsspalten ausgenommen — eine wirklich oder doch nahezu concordante Auflagerung der kalkischen Schichten auf den krystallinischen Schiefern. In deutlich discordanter Lagerung stehen z. B. die Schichten auf der Passhöhe des Stilfser Joches an, wo die schieferigen Phyllite nordwestlich einfallen, während die zunächst angeschlossenen schwarzen schieferigen Kalke eine Neigung nach Süd besitzen, weil hier eine Verwerfungsspalte hindurch zieht.



Hochleitensp. Tabarettaiwände. Ortlerp. Trafoetha. Madatschap. Mt. Cristallo.
Ortlergruppe v. d. Strasse bei der Franz-Joseph-Höhe.
(Erklärung der Buchstaben im Texte.)

Von der Passhöhe überblickt man einen grossen Theil des kalkigen bzw. dolomitischen Aufbaues des Ortlerhauptstockes längs der nördlichen Auflagerungsgrenze auf den krystallinischen Schieferenscatten. Von dem äussersten nördlichen Punkte unter der Hochleitenspitz an zeigen die Kalkschichten über den Rucksp. die Tabarettaiwände, die Felsen unter der Ortlerspitz und den unteren Ortlergletscher bis gegen das Trafoer Thal ein, südlich des Entalles, das in den wenigen zunächst am Ortler selbst über das Gletschereis vorstehenden Felsen in eine natürlichste Lagerung überzugehen scheint. An den Madatschwänden stellt sich wieder ein steileres Entallen ein, wobei die Schichten stark gefaltet und zusammengedrückt sind. Weiter nach Süden zu, schon in Val Vitello, werden sich die Schichten und nehmen an der Wandung unter dem Gletscher des Mt. Cristallo schliesslich

Der Rest enthält in ‰:

Kiesel- und Titansäure	78,75
Thonerde	13,00
Eisenoxyd	1,00
Kali	1,93
Natron	0,72
Wasser	3,70
	<hr/> 99,10

Demnach macht die Hauptmasse des Gesteins Kieselsäure aus, welcher eine thonige Substanz und sericitische Schuppen beigemengt sind. Ein Feldspathbestandtheil lässt sich in Dünnschliffen nicht erkennen.

Diese rostfleckigen, quarzitischen Flaserschiefer reichen im Marlprofil bis zum Sattel dieses Bergrückens, über welchen der Steig sich nun abwärts zu den Tabarettawänden umbiegt. Schicht für Schicht aufgeschlossen zeigen diese Grenzschichten einen deutlichen, allerdings raschen Uebergang in tief schwarze, splittrige, blättrig verwitternde, 8 m mächtige Kalkschiefer (1 des Profils) mit noch halbkrySTALLINISCH ausgebildeten, schwach glimmerglänzenden Thonfasern und Ueberzügen, welche fast dasselbe Aussehen besitzen, wie manche Phyllite. Solche halbkrySTALLINISCH entwickelte, phyllitähnliche Thonfasern wiederholten sich in Zwischenlagen noch mehrfach innerhalb der nächst höheren Schichten. Mir scheint dieses Verhältniss von grosser Wichtigkeit zu sein. Es wird doch wohl Niemand dieselbe als Folge einer Metamorphose, sei es durch Druck oder Contact, deuten wollen. Dafür lässt sich hier nicht der Schein einer Veranlassung auffinden.

Diese krySTALLINISCHE, phyllitähnliche Ausbildung der den Kalk sonst in Form von gewöhnlichem erdigen Thon begleitenden Fasern beweist vielmehr, dass, wie auch bei den unterlagernden Flaserschiefern, die eine krySTALLINISCHE Entwicklung begünstigenden Verhältnisse an dieser Stelle und in gleicher

des Ortlerstocks zusammensetzen. Man klettert, auf dem Steig, welcher an den Tabarettawänden zur Payerhütte führt, über die Köpfe dieser Kalk- und Dolomitschichten, die nur von wenig mächtigen, mergeligen schlecht aufgeschlossenen Mergelbänken unterbrochen werden, zum Sattel empor. Auch die obersten aus dem Gletschereis des Ortler Ferners aufragenden Felsköpfe bestehen noch aus dem gleichen dolomitischen Gestein. Dass in diesem ungemein mächtigen Schichtencomplexe noch verschiedene, bisher nicht getrennte Triasglieder verborgen stecken, ist nicht zweifelhaft. Aber die enorme Ausbreitung der Gletschermassen hindert hier eine nähere Untersuchung, jedoch findet man in dem von der Ortlerwand auf den Marltgletscher und den Endderwelt-Ferner herabgestürzten Gesteinsbrocken nicht gerade selten einzelne Stücke, welche durch eingeschlossene Versteinerungen auf das Vorhandensein mehrerer Unterabtheilungen hinweisen. Ein solcher tiefschwarzer, krystallinisch körniger Kalkbrocken mit 94,60 Kalkcarbonat, 2,75% Bittererdecarbonat, 2,00% Thon, 0,58% Eisenoxyd, 0,05 kohligen Bestandtheilen und Spuren von Phosphorsäure umschliesst zahlreiche weisschalige Ueberreste von Gastropoden und Bivalven. Unter ersteren befinden sich namentlich *Natica*-ähnliche Formen und solche, welche der *Neritopsis ornata* Schöff. sehr nahe stehen, wenn nicht mit derselben identisch sind.

Die Grenze zwischen dem Phyllitschiefer und den Triasschichten verläuft von dem Marltsattel nordwärts unter den Kalkwänden des Bärenkopfs und der Hochleitenspitz deutlich erkennbar bis zu einer Einsattelung zwischen der letzteren und dem Zumpanellberg und senkt sich dann zum Trafoierthal. Südwärts stösst man wieder auf die hier weniger vollständig aufgeschlossene Gesteinsscheide am Kuhberg vor dem Endderwelt-Ferner. Auch an dieser Stelle wiederholt sich dieselbe Schichtenfolge, wie am Marltrücken. Tiefer

quarzitische Schiefer an, welche auf der nördlichen Thalseite nach NO., auf der südlichen nach SW. einfallen, so dass das Thal ungefähr in eine Sattellinie eingetieft erscheint. Zahlreiche Blöcke des schon erwähnten Eruptiv-Gesteins, Palaeophyr (Suldenit und Ortlerit), mit Uebergängen in eine Tonalit-artige Felsart, deuten auch hier das Vorkommen zahlreicher Gänge desselben an.

Weiter abwärts im Thale stellen sich mehr und mehr phyllitische Schiefer ein, welche von der Brücke unterhalb der Casa del Zebbru gegen die Berghäuser an den Gehängen bei St. Antonio mit grünen chloritischen Schiefern sich in die Herrschaft theilen. In dieser Region legt sich auch ein am Gehänge fortstreichendes Lager von weissem, körnigem Kalk an, das sich weithin verfolgen lässt.

Näher gegen Bormio zu erblickt man hoch oben unter den Kalkwänden des Mt. Cristallo in den auslaufenden Schluchten des Val. d' Uzza eine Lage eines blendendweissen Gesteins. Um es zu erreichen, steigt man auf dem östlichen steilen Gehänge dieser Thalschlucht über ziemlich constant nach NO. einfallende phyllitische und chloritische Schiefer, in welchen auch als Zwischenschicht der körnige Kalk wieder austreicht, zu einer felsigen Region von quarzitischen Schiefern und feinkörnigen Augengneissen empor, in welchen sich das Thal mit zahlreichen tiefen, wild zerrissenen Seitenfurchen vergabelt. Merkwürdig ist hier eine in die Felsen eingesprengte, jetzt verfallene Canalanlage, welche in alter Zeit zur Bewässerung der tiefer liegenden Alpweiden gedient zu haben scheint. Ueber diesen zackigen Felsenriff legen sich wieder graue phyllitische, leicht verwitternde und ein weniger schroff ansteigendes Gehänge bildende Schiefer bei etwa 2340 m Höhe an. Es folgen dann zunächst darüber quarzitische, braunfleckige, flaserige Quarzitschiefer, wie im Marltprofil und dann bei 2450 m das blendendweisse Gestein, das sich nun als Gyps zu erkennen giebt. Derselbe bildet hier

Der Rückstand mit concentrirter Salzsäure unter Luftabschluss in der Kochhitze behandelt gab weiter 25,48% Lösung (die SiO_2 ausgeschlossen) mit:

Eisenoxyd	4,75
Thonerde	3,50
Eisenoxydul	5,75
Kalkerde	2,00
Bittererde	6,48
Wasser	3,00
	<hr/>
	25,48

Dazu

Kieselsäure	6,00
-----------------------	------

Bei dieser Lösung scheint sich hauptsächlich der Chlorit-ähnliche Bestandtheil zersetzt zu haben, der allgemein in den Phylliten enthalten ist und vom typischen Chlorit durch seine verhältnissmässig leichte Zersetzbarkeit durch Salzsäure sich unterscheidet. Ich habe diesen Gemengtheil deshalb unter der Bezeichnung „Phyllochlorit“ (Geog. v. Bayern, I. Bd. S. 166) vom eigentlichen Chlorit unterschieden.

Der letzte Rest ist immer noch grünlich gefärbt und erweist sich zusammengesetzt aus faseriger hellgrüner Hornblende, gelblichem Epidot mit Quarz und spärlichen schuppigen Theilchen. Nach dem spezifischen Gewicht getrennt theilt sich der Rest in

Epidot	5
Hornblende	30
Quarz	60
Unbestimmt	5

Der Flusssäure-Aufschluss ergab ein Gehalt von 8,4% Chloralkalien, in welchem Kalium nur in ganz geringen Mengen vertreten war. Der weisse schuppige Gemengtheil dürfte demnach aus Paragonit bestehen.

Phylliten und chloritischen Schiefer vorüber allmählig in die Höhe. Die Schiefer fallen hier noch constant in St. 3 mit $10-15^\circ$ nach NO. ein. Auch die Einlagerung von weissem körnigen Kalk, welche wir im Zebruthale und in der Uzzaschlucht bereits kennen gelernt haben, taucht in der entsprechenden Streichlinie wieder auf. Wir gelangen endlich zu einer breiten kesselartigen Einbuchtung, erfüllt mit Gebirgsschutt und grossen Kalkfelsblöcken, unter denen mächtige Quellen (bei 1625 m mit $6,5^\circ$ C.) hervorbrechen. Diese Vertiefung unmittelbar vor der Steilwand, über welche der Weg zu der mit den zwei verfallenen Thürmen gekrönten engen Passschlucht emporzieht, scheint durch Auswaschung eines in dieser Schichtenregion zu vermuthenden Gypsstockes entstanden zu sein. In der durch ungemein reiches Vorkommen von Edelweiss ausgezeichneten Schutthalde sah ich zum ersten Mal in diesem Gebirgstheil Bruchstücke eines rothgefärbten Trümmergesteins, welches unzweifelhaft dem sog. Verrucano entspricht, wie es von da westwärts bei Livigno und in dem Ofener Passthal öfters anstehend zu beobachten ist.

Bei dem Aufsteigen zum Pass überschreiten wir zuerst — die tieferen Schichten sind hier von Schutt überdeckt und verhüllt — äusserlich graue, etwas gelblich angewitterte, im Innern schwarze, trümmerige Dolomite, wie sie am alten Bade anstehen, dann wohlgeschichtete, dünnbankige, schwarze Dolomite mit weissen Kalkspathadern, in welchen die Scharte (1875 m) eingeschnitten ist. Jenseits derselben erweitert sich die Furth zu einer verebneten Fläche, auf der eine Kapelle steht. Die Kalkwände bestehen hier aus grauen, weissfleckigen Dolomitschichten, für welche weisse Kalkspathadern und kleine weisse rundliche Kalkspathknöllchen charakteristisch sind. Gegen die Seen hin legen sich mit gleichem NO-Einfallen ähnliche Schichten mit zahlreichen hellen Streifen und dann intensiv schwarze, weissaderige

Bestandtheile eine sericitische Beschaffenheit zu besitzen scheinen. Sie erinnern an die Phyllit-ähnlichen Schiefer in den liegendsten Schichten des Kalkgebirges am Marltkopf. Eine Reihe schmaler, langgezogener, parallel neben einander fortlaufender Hügel zieht sich an dem Thalrande fort. Die jähren aufragenden Kuppen derselben bestehen aus karrenfeldartig ausgewitterten Bänken eines harten, grauen, z. Th. weisslichen, seltenen röthlichen Kalks, während in den Eintiefungen zwischen den einzelnen Hügelrücken weiche, leichtverwitternde Mergel ausstreichen. Man wird hierbei lebhaft an das Vorkommen gewisser Dachsteinkalke erinnert. Doch glückte es mir nicht, Versteinerungen in diesen Schichten aufzufinden. Erst am Fusse des am nördlichen Thalrande aufsteigenden Berggehänges von Piz Ciumbraida finden wir geschlossene Lagen eines hell- und dunkelgrau gefleckten Mergelkalkes und schieferiger Mergel anstehen, welche den Liasfleckenmergel oder Algäuschiefer, wie sie sich am P. Lischana bei Tarasp vorfinden, entsprechen. Ihre Schichten fallen conform mit jenen am südlichen Thalgehänge nach NO. ein.

In diesem breiten, mit vortrefflichen Weidflächen versehenen Frälethale haben sich bereits aus zahlreichen Quellen die Gewässer zur Adda gesammelt und fliessen ostwärts in eine enge unzugängliche Felsschlucht zur Ponte del Piano, wo der Bach des Brauliothales sich mit der Adda vereinigt. Hoch am Gehänge verläuft ein Steig aus dem Frälethale zu dieser Brücke und der Jochstrasse. Schlägt man diesen Weg ein, so stossen wir in der Nähe der östlichsten Alphütte der Thalverebnung auf das Ausgehende der rhätischen Mergelkalke, in der Fortsetzung jener am oberen Thalrande und steigen dann über die aufgewitterten Schichtenköpfe der Dachsteinkalk ähnlichen Gesteinsbänke zu einem Sattel empor, von dem sich nun der Steig zu der wilden Schlucht des Forcolabachs senkt. Hier begegnen wir erst wieder sehr

und 35,49% Bittererdecarbonat. In demselben ist auch der Stollen der Martinsquelle eingetrieben. Zwischen den einzelnen zu Tag emporragenden Felsenköpfen ist theils Gehängeschutt, theils eine Art diluvialer Nagelfluh ausgebreitet, so dass die unmittelbar an diesen Dolomit angeschlossenen Schichten hier nicht entblösst sind. Doch stehen unfern der Badgebäude an einem schmalen Steig, welcher aufwärts gegen die Nibelungenquelle und dann abwärts zur Addaschlucht führt, intensiv schwarze, sehr dünnschieferige, mergelige Schichten an, in welchen ich ähnliche Fischechuppen, wie in der p-Schicht des Val Triazza-Profiles bei Tarasp¹⁾ und *Ostracoden*-Schälchen fand. Das Hangende wird von gelblich verwitternden Dolomiten, die in eine 2. Lage solcher dünn- geschichteter Schiefer und dann in schwarze weisspunktirte und mit kleinen Kalkspathknöllchen durchspickte Schichten übergehen, gebildet. Aehnliche Schichtencomplexe sind auch an der Jochstrasse bei dem 6^{ten} Kilometerstein blossgelegt.

Indem wir die Aufschlüsse an der Jochstrasse weiter aufwärts verfolgen, beobachten wir zunächst über dieser Region schwarzer Dolomite und dünn- geschichteter Schiefer, welche constant nach NO. einfallen, wohlgeschichtete, z. Th. tiefschwarze, z. Th. hellfarbige, selbst röthliche, vorherrschend weiss gefleckte und gebänderte Streifenkalke, welche vielfach von der Strasse durchschnitten werden. Sie erinnern lebhaft an die hellstreifigen, oft breccienartige Kalke der Radstädter Tauern. Auf grössere Strecken laufen sie mit dem Strassenzuge parallel bis in die Nähe der 2. Cantoniere. Bevor man diese erreicht hat, stösst man auf intensiv schwarze Dolomite mit weissen *Gyroporellen*-ähnlichen, aber nicht deutlich abgegrenzten und durch die späthige Beschaffenheit der Aushüllungsmasse auch mikroskopisch nicht bestimmter erkennbaren Einschlüssen neben sehr deutlichen *Crinoideen*-

1) a. a. O. S. 22.

In Allgemeinen scheinen Schiefer- und Kalkgebirgsschichten in gleichförmiger Lagerung sich an einander anzuschliessen. Sicher nachgewiesen ist dieses Verhältniss zwischen den hangendsten, den krystallinen Schiefern ähnlich ausgebildeten flasrigen Quarziten und den liegendsten kalkigen Schichten.

Leider geben die im Ortlerstock bis jetzt aufgefundenen spärlichen organischen Ueberreste noch keine zureichende Anhaltspunkte, um das ungemein mächtige Schichtensystem zwischen den sicher nachgewiesenen rhätischen Schichten und den flasrigen, weissfleckigen Quarziten, welches man als Ganzes wohl Ortlerkalk und -Dolomit nennen kann, in einzelne Stufen zu gliedern. Nur im Vergleiche mit den gut unterscheidbaren Stufen bei Tarasp und im Ofen-Gebirge sowie nach der Aehnlichkeit in der Gesteinsbeschaffenheit lässt sich vorläufig ungefähr folgende Schichtengliederung, welche mit der bereits 1863 von Theobald für das Bündner Kalkgebirge aufgestellten Reihenfolge nahezu übereinstimmt, vorschlagen:

Lias: Algäuschiefer-ähnliche graue, dunkelfleckige Kalke und Mergelschiefer mit Algenabdrücken und *Belemniten*-Einschlüssen.

Dickbankige graue oder weissliche, stellenweise röthliche, in Karrenfelder auswitternde Kalke (Lias- oder Dachsteinkalk?)

Rhätische Stufe: Versteinerungsreiche, graue, röstig verwitternde Mergel und Kalke.

Ortler Kalk und -Dolomit:

- a) Hellgraue, splittrige Dolomite (? Hauptdolomit).
- b) Rauhwacke, nur stellenweise entwickelt.
- c) Schwarze, dünnbankige, versteinerungsreiche (kleine *Gasteropoden*, *Crinoideen*, *Foraminiferen*) Kalke und Dolomite (? Raubler Stufe).

und unzweifelhaft einer der tiefsten Schichten des Kalkgebirgs nahe der Schiefergrenze angehört.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass diese Quellen sichtlich nicht, wie es so häufig bei warmen Quellen zu beobachten ist, mit einer gewissen Heftigkeit empordringen und aus der Tiefe aufsteigen. Im Gegentheil macht die Art ihres Zutage-tretens den Eindruck, als ob sie von oben her sich herabzögen und deshalb auch hoch an dem Bergabhang und nicht im tiefsten Thaleinschnitt ihren Austritt fänden. Dass die einzelnen Quellenergüsse einem gemeinsamen Hauptherde entstammen, dürfte nach der nahe vollständigen Uebereinstimmung in ihrer chemischen Zusammensetzung kaum zu bezweifeln sein.

Was zunächst die in diesen Thermen enthaltenen Salze anbelangt, so scheint nach dem geologischen Bau der Gegend sicher angenommen werden zu dürfen, dass diese Salze den Gyps führenden Schichten (ut. des voranstehenden Profils) entstammen, welche in der nächsten Nähe zwischen dem sericitischen flasrigen Quarzitschiefer und den tiefsten Dolomitschichten sowohl im Uzzathale wie am Südabhang des Mt. della Scala oberhalb Premadio bis zu Tag ausstreichen. Es ist eine stets sich wiederholende Erscheinung, dass mit solchen Gypsablagerungen Ausscheidungen von Stein-, Bitter- und Glaubersalz vergesellschaftet sind. Doch fehlt stellenweise eines oder das andere dieser Begleitsalze oder ist nur spärlich vorhanden.

Letzteres scheint bei den Gypsablagerungen des Ortlerstocks in Bezug auf Steinsalz (Chlornatrium) der Fall zu sein. Es fehlen in dem die Gypslinsen einschliessenden Mergelschiefer dementsprechend auch jene würfelförmigen Eindrücke oder Krystallausfüllungen von Steinsalz, welche sonst so häufig in derartigen Schichten vorzukommen pflegen. Daraus erklärt sich die relative Armuth der Thermen an Chlornatrium gegenüber dem Gehalte an Gyps, Bitter- und

nördliches Einfallen beobachtet wird, so muss sie sehr tief hinabgreifen. Das Wasser sinkt in den zerklüfteten Dolomit ein bis auf die impermeablen Schiefer, welche unter den Kalkbildungen liegen, und steigt dann von dem südlichen Schenkel der Mulde durch die Klüfte des Dolomits wieder auf. Es ist tief genug hinabgegangen, um eine Erdwärme zu treffen, welche genügt, um es bis zu 39° C. zu erwärmen. Dass es grade an der Stelle erscheint, liegt daran, dass hier eine synclinale Einbiegung in der Richtung der Streichungslinie ist, welche man deutlich beobachten kann und in welcher auch die Schlucht der Adda verläuft, welche aber eine Erosionsschlucht und späteren Ursprungs ist, als die durch die Erhebung des Gebirgs bedingte Biegung der Schichten.* Theobald leitet demnach die hohe Temperatur der Quellen von der inneren Erdwärme und von dem Umstande ab, dass Tagwässer sehr tief in die Erde eindringen, dort an einer undurchdringlichen Gesteinsschicht sich ansammeln und erwärmen, um alsdann wieder an günstiger Stelle zu Tag aufzusteigen. Woher die Quellen ihren Gehalt an Salzen nehmen, wird hierbei nicht erörtert. Indess kann man von einem solchen Aufsteigen der Thermen aus der Tiefe nichts wahrnehmen; das Quellwasser scheint vielmehr da, wo es zu Tag tritt, eher von der Höhe sich herabzuziehen und zwar, wenn man die Verbreitung der verschiedenen Quellpunkte ins Auge fasst, von dem hohen mächtigen Kalkstock des Mt. Cristallo her. Dazu kommt, dass die geringe Neigung der Kalkschichten am N.- und S.-Rande des Ortlerstocks nicht für eine beträchtig tiefe Einnuldung der Kalklagen spricht; es scheint vielmehr der Kalkstock auf einer schwach nach SW. geneigten und nur gering eingebuchteten Unterlage aufgesetzt zu sein.

Zur Erklärung der hohen Temperatur der Quellen ist aber auch die Annahme einer solchen tief niederziehenden Schichtenbiegung, aus der die Thermen wieder empor zur

niedrigsten Punkte dieser sich kreuzenden Linien finden die bis dahin unterirdisch circulirenden Gewässer den geringsten Widerstand, der ihrem Austritt zur Tagesoberfläche entgegensteht und hier an dem Felsenabbruch des alten Bades ist es, wo sie dann aus den Klüften des Dolomites als Thermen hervorquellen.

So wenig wahrscheinlich es auch für den ersten Augenblick sich darstellen mag, dass so hochgradig warme Quellen, wie es die Thermen von Bormio sind, ihren Ursprung eiskaltem Schmelzwasser sollten zu verdanken haben, so leicht begreiflich wird diese Annahme, wenn man sich die geologische Constitution der hier herrschenden Gesteinsbildungen und die eigenthümlichen Oberflächenverhältnisse eines fast senkrecht bis gegen 2000 m aufsteigenden Gebirgsmassiv ins Auge fasst. Bestätigt wird diese Annahme überdies noch durch die Wahrnehmung, dass in Jahreszeiten lang andauernder Kälte, während welcher kein Schmelzwasser erzeugt wird, die Ergiebigkeit namentlich der Martinsquelle als eine der höchstgelegenen beträchtlich nachlässt. Es wird gesagt, dass diese Quelle schon auf kurze Zeit ganz ausgeblieben sei, dann aber bei Beginn der Schneeschmelze wieder zu fließen begonnen habe.

Das eingehende Studium der Quellenverhältnisse von Bormio hat mich nunmehr zur Ansicht geführt, es sei auch für die Thermen von Gastein wahrscheinlich, dass einfach durch ein Niedersinken von Schmelzwasser auf den benachbarten höchsten Gebirgsthellen der Taurenkette in das Innere des Gebirgsmassivs bis auf das Niveau von Gastein genügt, um dem Wasser den hohen Wärmegrad zu ertheilen, mit dem es zu Gastein gleichfalls ohne irgend beträchtlichen Druck wahrnehmen zu lassen, zu Tage tritt.¹⁾

1) v. Gümbel, Geolog. Bemerk. ü. d. warmen Quellen von Gastein im Sitz. d. bayer. Acad. d. Wiss. math.-phys. Classe 1889. XIX. S. 407.

Ueber die Umbildung der Lieberkühn'schen Drüsen durch die Solitärfollikel im Wurmfortsatz des Menschen.

Von N. Rüdinger.

(Mit Tafel V.)

(Eingelaufen 15. Juni.)

In den letzten Jahren hatte ich Gelegenheit die Wurmfortsätze von fünf Enthaupteten bald nach dem Tode herausnehmen und in geeigneter Weise conserviren zu können. Die Individuen, denen die Wurmfortsätze entnommen wurden, sind in den Sektionsprotokollen als gesunde kräftige Männer, in den mittleren Lebensjahren stehend, bezeichnet.

Der Magen, der Dünn- und Dickdarm zeigten sich bei denselben von normaler Beschaffenheit und bei drei der Enthaupteten konnte constatirt werden, dass die Dünndarmverdauung eingetreten war.

Die Wände des Duodenum und des Jejunum zeigten sich etwas geröthet, das Darmrohr mässig stark ausgedehnt und etwas geschwellt. Bei der Eröffnung des Leerdarmes floss der braungelbe Inhalt aus und die Oberfläche der Mucosa war mit zähem Schleim belegt. Der Wurmfortsatz wurde entweder dicht am Coecum abgetragen oder in Verbindung mit einem Stück des letzteren herausgenommen, theils in Müller'scher Flüssigkeit, theils in Picrin-Salpetersäure und einzelne Stücke auch in Alkohol conservirt. Bei einem

der Enthaupteten konnten sechs noch lebende Spulwürmer aus dem Ileum entfernt werden und später zeigte sich, dass der Inhalt des Processus vermiformis bei diesem Manne von den Eiern des genannten Thieres ganz durchsetzt war. Die Stücke des Darmes, bei welchen die Picrin-Salpetersäure zur Conservirung Verwendung fand, waren fast alle unbrauchbar, weil eine starke Schrumpfung des Objectes und Loslösung des Drüsen- und Darmepithels eingetreten war und kamen daher diese in Picrin-Salpetersäure conservirten Präparate bei Beurtheilung der Untersuchungs-Ergebnisse am Wurmfortsatze nicht in Betracht.

1) Die lymphoiden Zellen im Wurmfortsatz.

Jene Forscher, welche sich mit der Schleimhaut des Darmkanales beschäftigt haben, wissen, dass die Solitär-follikel im Dünn- und Dickdarm in Grösse und Zahl einem hochgradigen Wechsel unterliegen und wurde von Hofmeister ganz besonders darauf hingewiesen, dass das adenoides Gewebe d. h. die Lymphzellen in demselben bei Hungertieren spärlicher sei, als bei gut genährten. Aber auch die Gesamternährung sei von Einfluss auf die Zahl von Wanderzellen in der Darmschleimhaut. Selbst unter ganz normalen Verhältnissen sind in dem einen Falle makroskopisch gar keine Follikel an der freien Schleimhautfläche des Darmes sichtbar, während in einem anderen die Schleimhaut des ganzen Darms mit kleinen runden Erhöhungen reich besetzt ist. Zuweilen sieht man an der Stelle, wo die Follikel angebracht sind, kleine Einsenkungen, die man an den Mandeln und der Zungenwurzel ebenso, wie im Colon und Rectum beobachtet. Diese Buchten, die Krypten, stellen Einsenkungen der Schleimhaut an der Stelle der Follikel dar, die man jedoch im Wurmfortsatz des Menschen ganz vermisst. Hier trifft man den Follikel in gleicher Ebene mit jener Schleimhautfläche, die nur Lieberkühn'sche Drüsen einschliesst.

sowohl die einzelnen Solitärfollikel, als auch die Gruppen der Follikel nicht gleichmässig in der Schleimhaut des Wurmfortsatzes vertheilt sind, sondern um so vermehrter auftreten, als man sich dem blinden Ende desselben nähert, so ergaben doch die Schnitte des Wurmfortsatzes von verschiedenen Individuen, welche annähernd an übereinstimmenden Stellen desselben gewonnen sind, dass in dem Verhalten und der Zahl der lymphoiden Zellengruppen einerseits und der Anordnung der Lieberkühn'schen Drüsen andererseits ziemlich grosse Verschiedenheiten bestehen.

Während die Schleimhaut eines Querschnittes von dem Wurmfortsatz des Individuums A in ihrer grössten Ausdehnung keine Lieberkühn'schen Drüsen besitzt und fast nur von lymphoider Substanz durchsetzt ist, zeigt der Querschnitt von dem Processus vermiformis des Mannes B in der Schleimhaut fast ausschliesslich Lieberkühn'sche Drüsen. Wo die solitären Follikel in der Schleimhaut des Wurmfortsatzes auftreten, fehlen die Lieberkühn'schen Drüsen und wo diese in voller Ausbildung vorhanden sind, vermisst man die Follikel. Beschränken sich die Follikel auf die subglanduläre Zone der Schleimhaut, so dass sie noch ausserhalb der Muscularis mucosae sich befinden, dann stehen die Lieberkühn'schen Drüsen ohne Unterbrechung ziemlich dicht gedrängt nebeneinander, theils von gleicher, theils von ungleicher Grösse.

Diese Thatsache allein drängt nothwendig zu der Fragestellung, wodurch dieses anatomisch-verschiedene Verhalten der Schleimhaut bedingt sein könne. Dieser Wechsel der Gebilde muss unzweifelhaft in einem Zusammenhang stehen mit der Ruhe und der Thätigkeit der Schleimhaut in den verschiedenen Stadien der Funktion im Dickdarm resp. im Wurmfortsatz!

Nach den bisherigen Ergebnissen meiner Untersuchungen, die ich am Wurmfortsatze gewinnen konnte, muss ich die erste

likels nicht im geringsten. Würden die Lieberkühn'schen Drüsen bei der Vergrößerung eines Follikels verdrängt, so müssten dieselben dort, wo der lymphoide Zellenhaufen eine Vergrößerung erfährt, dichter zusammenrücken, was aber durchaus nicht der Fall ist.

Man kann ganze Schnitreihen untersuchen, ohne eine Aenderung in der Stellung der Lieberkühn'schen Drüsen zu einander wahrzunehmen.

Ein Vergleich der Schnitte von den Wurmfortsätzen der verschiedenen Individuen ergibt ganz überraschende Resultate. An der einen Schnittreihe von einem Individuum A lässt sich nachweisen, dass die Lieberkühn'schen Drüsen, wie Palissaden neben einander stehend, die Schleimhaut fast des ganzen Umfangs des Processus vermiformis erfüllen (Fig. I), während sich an einer anderen Schnittserie von einem Individuum B in gleicher Ausdehnung in der Schleimhaut nur drei oder vier Lieberkühn'sche Drüsen zählen lassen. (Fig. II.)

Fassen wir vorerst noch den gegen die freie Schleimhautfläche vorrückenden Leucocytenhaufen in's Auge, so sieht man, dass er in dem Verhältniss, als durch ihn das Epithel der Schleimhaut vorgewölbt wird, ihre Cylinderzellen umformt, indem aus diesen platte Zellen hervorgehen, die schliesslich wie ein einschichtiges Plattenepithel, den Solitär-follikel gegen das Darmlumen abgrenzen. Die Cylinderzellen und auch ihre Kerne werden so abgeplattet, dass der grösste Durchmesser der letzteren der Schleimhautfläche parallel steht.

Unzweifelhaft ist diese Umformung der Cylinderzellen zunächst das Resultat der mechanischen Einwirkung des sich vergrößernden lymphoiden Zellenhaufens, welcher die Schleimhaut hügelig nach dem Darmlumen vorwölbt. Die Verdünnung der Epithelzellen erreicht allmählig, wie dies schon von anderen Autoren hervorgehoben wurde, einen so hohen Grad, dass die Kittsubstanz zwischen denselben oder die Zellenplatten selbst zerreißen und dem Follikelinhalt den Eintritt

cessus vermiformis annehmen, dass dieselben eine endgiltige Rolle im Darminhalt spielen. Nicht eine einzige Thatsache ist mir bei diesen Untersuchungen entgegengetreten, die ich dahin verwerthen könnte, dass eine Rückkehr der einmal in das Darmlumen gelangten Kerne der Leucocyten in die Schleimhaut, denn nur Kerne allein kann ich im Darmrohr wahrnehmen, stattfindet. — Lymphoide Zellen oder nur deren Kerne gelangen nicht nur zwischen den Cyli-
nderepithelien, sondern auch nach Verdünnung und Zerrei-
ssung des Epithels an den solitären Follikeln und den Follikelgruppen in das Lumen des Wurmfortsatzes zu dessen Inhalt. Dass der Wurmfortsatz immer mit einem feinkörnigen oder einem graugelben Sekret erfüllt ist, geht aus den Untersuchungen der fünf Präparate klar hervor. In dem einen Falle war der Inhalt ganz durchsetzt mit den Eiern von *Ascaris lumbricoides*, welcher bei der Sektion aus dem Dünndarm genommen wurde.

2) Die Einwirkung der lymphoiden Zellen auf die Lieberkühn'schen Drüsen.

Bei den Musterungen der Schnittserien des Wurmfortsatzes an den fünf Individuen, deren Darm in den verschiedenen Stadien der Verdauung bei der Conservirung sich befand, beobachtete ich ein eigenartiges Verhalten der Lieberkühn'schen Drüsen zu jenen Stellen, wo ein Solitärfollikel oder eine Follikelgruppe gegen die Lieberkühn'schen Drüsen vorrückt. Im ersten Augenblick musste man an verschiedene Möglichkeiten, welche diese immer wiederkehrenden Bilder in der Schleimhaut zu Stande bringen, denken und man konnte zunächst annehmen, dass, wenn man die blinden Enden der Lieberkühn'schen Drüsen bei verschiedenartiger Schnittführung zur Anschauung bringt, die Zellengruppen derselben ohne Lumen und ohne regelmässige Anordnung sich zeigen. Allein bald musste ich die Ueberzeugung gewinnen, dass in

zellen eingetreten ist, die rothe Farbe, resp. das Protoplasma mehr und mehr schwindet, während an der entgegengesetzten Umrandung der Drüse die rothe Färbung des Drüseninhalts, in welchen die blauen Kerne auffallend durchschimmern, erhalten ist. Neben der Aenderung der Form und der Stellung der Cylinderzellen zueinander und zur scharf begrenzten, kernhaltigen Tunica propria der Drüse geht die Zellenmembran und das Protoplasma der Cylinderzellen zu Grunde, denn die Zelle wird kleiner und die specifische Farbenreaction bleibt an der formell geänderten Zellenreihe vollständig aus. Die blau gefärbten Zellenkerne, wenn auch in unregelmässiger Anordnung, sind jetzt um so deutlicher geworden. Sehr bald erkennt man auch keine Tunica propria der Drüse, die sehr charakteristisch und deutlich war, und in dem Verhältniss, als der solitäre Follikel sich vergrössert, wird die Lieberkühn'sche Drüse in ihrem ganzen Umfange in den beschriebenen Kreis der Veränderung gezogen: ihr Lumen schwindet allmählich gänzlich, die Tunica propria ist gar nicht mehr zu erkennen und an der Stelle, wo die Drüse war, ist jetzt ein Nest von blau gefärbten Kernen aufgetreten. Dieselben beschränken sich anfänglich noch auf die Stelle, wo die Drüse war und schliesslich schwindet auch diese Begrenzung, so dass die Lieberkühn'sche Drüse ganz und gar den Charakter des Solitärfollikels angenommen hat und auf dem Querschnitt nur die helle centrale Parthie des Follikels, das Keimcentrum, mit dem dunklen dichten Hof vorhanden ist. (Fig. II.) Diese Veränderungen der Drüsen schreiten von ihren blinden Enden gegen die freie Schleimhautfläche hin fort und an der Stelle der Lieberkühn'schen Drüsen befinden sich nur noch lymphoide Zellen, an welchen das Protoplasma eine kaum sichtbare Schichte um den Kern herum bildet. Selbst bei Anwendung starker Vergrösserungen erhält man den Eindruck, als seien in dem Solitärfollikel, wenn derselbe die Schleimhautoberfläche

Ich sah in den Cylinderzellen der Lieberkühn'schen Drüsen vielfach Kerne derselben, welche gegen die dem Lumen der Drüse zugekehrte Abtheilung der Zelle vorrücken und finde in einer und derselben Ebene, ganz dicht nebeneinander, zwei Kerne auftreten, die kaum anders als Kerntheilung ohne Mitose gedeutet werden können. Diese Kerne vergrössern sich und wandern auch bis in das Drüsenlumen, in welchem man ihnen, wenn auch nicht sehr häufig, auf Querschnitten der Drüsen begegnet. Seltener sieht man diese Kerne gegen die Basalmembran der Drüse vorrücken und glaube ich auch nicht, dass sie diese Richtung regelmässig einschlagen, was doch geschehen müsste, wenn dieselben zu den Wanderzellen der Follikel werden sollten. Ich vermuthe vielmehr, dass, wenn die Lieberkühn'schen Drüsen durch die Einwirkung der Follikelelemente umgewandelt sind, eine Neubildung derselben, welche *a priori* angenommen werden muss, durch Theilung der noch erhaltenen Drüsenzellen stattfindet. Man sieht nämlich an einzelnen Stellen gabelig getheilte Lieberkühn'sche Drüsen in grösserer Zahl auftreten, während die meisten Drüsen durchschnittlich einfach geformte Cylinder sind. Zwei, drei und selbst vierfache Theilungen der Lieberkühn'schen Drüsen, wie man sie z. B. im Dickdarm des Hundes beobachtet, sind im Processus vermiformis und auch im Dickdarm des Menschen grosse Seltenheiten. Aber an einzelnen Objecten begegne ich dieser Verdopplung der Drüsen in so grosser Zahl, dass ich eine totale Theilung derselben vermuthe nach jenem Verdauungsstadium, bei welchem die Drüsen zu Leucocythenhaufen umgewandelt wurden. Wäre diese Theilung der Drüse als ein regelmässiger Vorgang nachgewiesen, so würden die Beobachtungen von v. Davidoff meiner Meinung nach auch dahin gedeutet werden können, dass die Vermehrung der Kerne in den Cylinderzellen der Schleimhaut dann erforderlich ist, wenn beim Follikeldurchbruch eine

Schleimhaut aus nach der freien Oberfläche fortschreitend, beschrieben und in seiner Figur 13 abgebildet. Hier erscheint doch der Vorgang der Art, dass man viel eher die Veränderungen des Epithels, durch den vorrückenden Follikel bedingt, von der Tiefe nach dem Lumen des Darmrohres hin fortschreitend, ableiten möchte, als ein umgekehrtes Verhältniss annehmen. Wenn auch die Bildungsstätte für die Leucocyten nach der Anschauung v. Davidoffs in die Epithelzellen der Schleimhaut verlegt wird, so kann doch die Thatsache nicht geleugnet werden, dass der Inhalt der Follikel, wenn dieser eine gewisse Grösse, resp. eine bestimmte Reife erlangt hat, in das Darmrohr einwandert. Ferner darf auch an die Möglichkeit gedacht werden, dass die Kerntheilung in den Epithelzellen der Schleimhaut sowohl, als auch in den Lieberkühn'schen Drüsen als Einleitung der Zelltheilung stattfindet, um das zu Grunde gegangene Drüsen- oder Schleimhaut-Epithel wieder zu ersetzen. Eine Neubildung der Lieberkühn'schen Drüsen von dem Epithel der noch vorhandenen Drüsen oder von der Schleimhaut aus, ganz ebenso wie das letztere bei der erstmaligen Entwicklung zu Stande kam, muss doch als einzige Möglichkeit festgehalten werden. Für eine andere Art des Wiederersatzes der Lieberkühn'schen Drüsen spricht keine einzige Thatsache an den mir vorliegenden Objekten.

Doch muss ich noch auf eine Eigenthümlichkeit in dem Verhalten der Lieberkühn'schen Drüsen hinweisen, für die ich ebensowenig, wie für die erwähnte Neubildung eine Erklärung geben kann. In der Figur 8 der Tafel V sind Querschnitte der Drüsen gezeichnet, welche eine sehr verschiedene Grösse zeigen. An einzelnen Stellen der Schleimhaut, insbesondere dort, wo ein Leucocytenhaufen vorhanden war, begegnet man sehr kleinen Lieberkühn'schen Drüsen, an welchen ich am Querschnitt einen Kranz von 15—18 Cylinderzellen zählen konnte, während ich an grossen Drüsen

40 — 48 Cylinderzellen annähernd festzustellen im Stande war. Indem man im ersten Augenblick diese kleinen Lieberkühn'schen Drüsen für neu gebildete ansehen möchte, konnte ich über ihre Herkunft keinen Aufschluss erlangen. An keinem einzigen Präparat der Wurmfortsätze konnte ich Längsschnitte dieser Drüsen zur Anschauung bringen und bleibt mir daher ihre Abstammung und ihre Deutung unklar.

Ich zweifle nicht daran, dass wenn man eine genügend grosse Zahl von menschlichen Wurmfortsätzen gut conservirt zur Verfügung hätte, und, was ich besonders betonen möchte, lückenlose Serien von Querdurchschnitten herstellt, alle die berührten Fragen beantwortet werden könnten. Nach meinem Dafürhalten stellt der Wurmfortsatz ein besonders geeignetes Gebilde für das Studium aller Vorgänge, welche sich in dessen Schleimhaut bei den verschiedenen Verdauungsstadien abspielen, deshalb dar, weil derselbe mit seinem Inhalt unversehrt zur Conservirung und Untersuchung gelangen kann.

Beschreibung der Figuren auf Tafel V.

Figura I. Darstellung eines Abschnittes der Schleimhaut des Wurmfortsatzes vom Menschen, an welchem die Lieberkühn'schen Drüsen dicht gedrängt vorhanden sind. Der ganze Querschnitt des Processus vermiformis, von dem die Abbildung gewonnen wurde, lässt nur vier solitäre Follikel erkennen, während zwischen denselben eine grosse Zahl der Lieberkühn'schen Drüsen erhalten ist. Diese zeigen ganz normale Abstände voneinander.

Fig. II. Diese Figur ist einem Querschnitt eines Wurmfortsatzes entnommen, an welchem nur sehr wenige Lieberkühn'sche Drüsen sichtbar erscheinen. Die einzelnen noch erhaltenen Drüsendurchschnitte treten nur in der Nähe der Schleimhaut auf. Die Follikel 1., 2. und 3. erscheinen lang gestreckt und das helle Keimcentrum zeigt dieselbe längliche Form, wie der ganze Follikel. 4. Schiefe Abschnitte von drei Lieberkühn'schen Drüsen. 5. Eine lange Drüse, welche von zwei Follikeln umschlossen ist.

Fig. III. Querschnitt von einem Processus vermiformis, an welchem alle Schichten von der Muscularis propria bis zur freien Schleimhautfläche aufgenommen sind.

1. Muscularis propria des Processus vermiformis.

2. Submucosa, in welcher ein sich entwickelnder Follikel eingeschlossen ist. Derselbe befindet sich noch ausserhalb der Muscularis mucosae, welche sich bei normalem Verhalten die Mucosa von der Submucosa abgrenzt.

4. Die Lieberkühn'schen Drüsen grösstentheils quer durchschnitten

5. Freie Schleimhautfläche mit dem Cylinderepithel überkleidet.

6. Solitärer Follikel mit einem hellen Keimcentrum.

Fig. IV. Solitärfollikel bis zum Epithel der Schleimhaut vorgerückt.

1 Die Leucocyten erfüllen dichtgedrängt den ganzen Follikel und reichen bis zur Schleimhaut (2).

Fig. VII. Solitärfollikel bei schwacher Vergrösserung. 1. Dichter dunkler Hof; 2. Helles Keimcentrum des Follikels 3 und 4, Veränderte Lieberkühn'sche Drüsen, von welchen einzelne ganz, andere zur Hälfte durch die Einwirkung des Solitärfollikels verändert sind.

Fig. VIII. Eine Gruppe von verschieden grossen Lieberkühn'schen Drüsen. 1. Grosse Drüsen quer durchschnitten, deren Ausführungsgang von vielen Zellen umringt ist. 2. Reticuläre Binde substanz, in welcher 3, kleine langgestreckte Drüsen mit einer geringeren Zahl von Cylinderzellen ausgekleidet sichtbar sind. Abgesehen von der Kleinheit dieser Drüsen, ist kein Unterschied von den grossen zu konstatiren.

Sitzungsberichte
der
königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung
zur Feier des 132. Stiftungstages
am 21. März 1891.

Die mathem.-physikal. Classe hat im verflossenen Jahre 5 Mitglieder durch den Tod verloren: das ordentliche Mitglied Dr. Franz Hessler, den Senior der Classe und der Akademie, dann aus der Reihe der auswärtigen Mitglieder: den französischen Geologen Edmond Hébert in Paris; aus der Reihe der correspondirenden Mitglieder: den Chemiker Heinrich Will in Giessen, den um die physiologische und landwirthschaftliche Chemie verdienten Forscher Wilhelm Henneberg in Göttingen und den russischen Reisenden und Geographen Peter von Tschichatscheff in Florenz.

Franz Hessler.

Im Jahre 1878 stellte sich dem damaligen Classensekretär, Herrn von Kobell, ein altmodisch, aber sorgfältig gekleideter Greis als der pensionirte kgl. bayer. Bezirksarzt Dr. Franz Hessler aus Wemding vor, mit der Angabe, er wäre auswärtiges Mitglied unserer Akademie und träte bei seiner

Uebersiedelung nach München statutengemäss als ordentliches Mitglied der math.-physikal. Classe ein. Herr v. Kobell, dem der Name und die Verdienste Hessler's gänzlich unbekannt waren, erfuhr in der That aus den Akten, dass Franz Hessler schon im Jahre 1848 auf Vorschlag Walther's zum correspondirenden und im Jahre 1852 auf Vorschlag der Herren Ringseis und Martius zum auswärtigen Mitgliede der Akademie wegen seiner Verdienste um die Kenntniss der altindischen Medizin erwählt worden war.

Es ist wahrlich ein seltenes Vorkommen, dass ein vielbeschäftigter Arzt das Interesse besitzt und die Zeit sich abringt, um eine Sprache, die damals nur Wenige beherrschten, sich anzueignen und in jahrelanger Arbeit die merkwürdigen Aufzeichnungen einer der ältesten Heilkunden der ärztlichen Wissenschaft zugänglich zu machen. Vor 50 Jahren war es zwar noch ziemlich häufig der Fall, dass der Arzt sich mit irgend einem Zweige der Naturwissenschaft, namentlich der beschreibenden, eingehend beschäftigte und an der Erforschung der Flora und Fauna seines Wohnortes sich betheiligte; auch das ist bei der eigenartigen Entwicklung der Medizin, welche immer mehr Special-Kenntnisse und Fertigkeiten von ihren Jüngern verlangt, jedoch unbegreiflicher und unheilvoller Weise im deutschen Reiche trotzdem weniger Zeit zum Studium beansprucht wie früher, kaum mehr möglich; die Zeichen deuten aber auch schon jetzt darauf hin, dass diese expansive Ausbildung auf Kosten der Tiefe derselben geschieht und das vorzüglich aus den Naturwissenschaften gewonnene Verständniss der Vorgänge sowie die feine Beobachtungsgabe des alten Arztes dabei verloren geht.

Das äussere Leben Franz Hessler's verlief in der einfachsten Weise.

Er wurde zu Kronbach bei Aschaffenburg am 13. Oktober des Jahres 1798 als der Sohn schlichter Bauersleute geboren. Nachdem er das Gymnasium zu Aschaffenburg mit

Auszeichnung absolvirt hatte, bezog er zuerst die Universität Würzburg, begab sich aber bald von da nach Heidelberg, um unter Leitung des Professors Creuzer während der Jahre 1823 und 1824 Philologie zu studiren, wodurch er den Grund zu seiner Kenntniss des Sanskrit legte. Nach Würzburg zurückgekehrt, wurde er jedoch der Philologie aus mir unbekannt gebliebenen Gründen untreu und begann Naturwissenschaften und Medizin zu treiben, auf welche er 6 Jahre verwendete. Nach rühmlich erlangtem Doktorgrade der Philosophie und der Medizin fungirte er in Würzburg während zwei Jahren als Assistenzarzt an der städtischen ambulanten Klinik unter Fend und Ruland, und bestand dann die damalige Prüfung für den gerichtsarztlichen Staatsdienst sowie die sogenannte Proberelation bei der Prüfungskommission in Bamberg mit der Note der Eminenz. Darauf bekleidete er während 2 Jahren die Stelle als Leibarzt bei dem in Deutschland reisenden russischen Grafen Wielhorsky, bis er im Jahre 1833 als kgl. Landgerichtsarzt in Miesbach angestellt wurde. Auf seine Bitte wurde er von da in gleicher Eigenschaft nach dem kleinen Badestädtchen Wemding im Ries versetzt, woselbst er 28 Jahre hindurch (bis 1862) die medizinische Praxis in allen Zweigen der Arzneikunde ausübte und zugleich als Badearzt thätig war.

Hier in der Abgeschlossenheit von dem Treiben der Welt entstand das Werk, welches seinen Namen über seinen Wirkungskreis als Arzt bekannt machen sollte. Er übersetzte den Ayurveda d. i. das Lehrbuch der Heilkunde des Susruta aus dem Sanskrit in's Lateinische in 3 Bänden und 2 Kommentar-Fascikeln, welche mühsame Arbeit einen Zeitaufwand von 20 Jahren in Anspruch nahm.

Von Wemding wurde er im Jahre 1862 als Bezirksarzt nach dem oberbayerischen Markte Geisenfeld versetzt, in welchem er 11 Jahre wirkte, bis er 1873 im Alter von 75 Jahren in den erbetenen Ruhestand, unter Anerkennung

unserem berühmten verstorbenen Collegen, dem Orientalisten Markus Josef Müller, auf das Entschiedenste betont wurde. Es würde allerdings die Geschichte der Medizin eine neue Grundlage erhalten haben, wenn der Suśruta das hohe Alter gehabt hätte und die Quelle der europäischen Medizin gewesen wäre, wie Hessler meinte; aber seine angeblichen Beweise liessen sich leicht widerlegen und als grundlose Annahmen erkennen.

Trotz alledem muss man andererseits bedenken, dass Hessler mit seiner Uebersetzung nicht der Philologie, sondern vorzugsweise der Medizin dienen wollte, indem er der ärztlichen Wissenschaft die altindischen Anschauungen über die Erkrankungen und die Heilmittel zu erschliessen bestrebt war. Und dass man hierin ihm zu grossem Danke verpflichtet ist, das ist keinem Zweifel unterworfen, wenn auch die Philologie von seinen Arbeiten keinen Gewinn gehabt hat und wenn auch die an die Uebersetzung des Suśruta sich anknüpfende eigentlich wissenschaftliche Thätigkeit, durch welche dem Buche seine wahre Stelle in der Wissenschaft hätte angewiesen werden sollen, eine misslungene ist.

Man braucht zu dem Zwecke nur den Eindruck, welchen die Kenntniss des Ayurveda des Suśruta auf einen der ersten Kenner der Geschichte der Medizin, auf H. Haeser, gemacht hat, sich zu vergegenwärtigen. Obwohl Haeser ebenfalls gegen Hessler geltend machte, dass die in der Sanskrit-Sprache verfassten medizinischen Schriften wahrscheinlich nicht früher als kurz vor dem Anfange der christlichen Zeitrechnung niedergeschrieben worden sind, so hält er doch den Ayurveda für das wichtigste der vielen noch vorhandenen medizinischen Sanskritwerke. Er berichtet aus Hessler's Werk ausführlich in seinem Lehrbuch der Geschichte der Medizin über die darin niedergelegte staunenerregende Masse von medizinischen Beobachtungen und Erfahrungen, zu deren Sammlung sicherlich Jahrhunderte nöthig gewesen

seien. Wir lernten daraus, dass in Indien damals eine eigentlich wissenschaftliche Heilkunde noch nicht bestand, da ihr vor Allem die Grundlage jeder wissenschaftlichen Medizin, nämlich die Kenntniss des Baues und der Verrichtungen des Körpers, gänzlich mangelte; nur diejenigen Fächer der Medizin, welche sich bis zu einem gewissen Grade rein empirisch zu entwickeln vermögen wie die Chirurgie und die Geburtshilfe, waren zu einem überraschend hohen Grade der Ausbildung gediehen.

Das unbestreitbare Verdienst Hessler's, uns ein wichtiges Gebiet der ältesten Geschichte der Heilkunde zugänglich gemacht zu haben, hat offenbar die einsichtigen und bedeutenden Aerzte Walther und Ringseis, von denen der Erstere wegen seiner Verdienste um die Physiologie, namentlich durch Einführung der allgemeinen Anatomie in Deutschland in seinem geistreich geschriebenen Lehrbuch der Physiologie, der Letztere wegen seiner Verdienste um die mineralogische Sammlung Aufnahme in unsere Akademie gefunden hatten, veranlasst, Hessler zum Mitgliede der Akademie vorzuschlagen. Auch hat der hiesige ärztliche Verein Hessler aus dem gleichen Grunde zu seinem Ehrenmitgliede erwählt.

Hessler war eine stille bescheidene Natur, freundlich und lebenswürdig, voll edler Begeisterung für die Wissenschaft. Im März des vorigen Jahres wohnte der 91 jährige würdige Greis noch mit aller Aufmerksamkeit der Festsitzung der Akademie an. Im Monat Juni wurden wir durch die Nachricht überrascht und schmerzlichst berührt, dass unser College am 15. Juni ohne vorausgegangene Krankheit gestorben sei und bereits auf dem Friedhofe zu Haidhausen sein Grab gefunden habe. Ohne das Geleite trauernder Angehöriger und Freunde ist er in den Schooss der Erde versenkt worden. Er war nach dem Tode seiner Lebensgefährtin fast ganz vereinsamt und lebte ohne weiteren Umgang in seiner der Stadt fern liegenden Wohnung in der Bogen-

hausener Strasse. Die letzten Jahre seines Lebens waren noch durch schwere Nahrungssorgen getrübt, da er fast sein ganzes durch mühselige Arbeit errungenes kleines Vermögen ohne sein Verschulden verloren hatte. Die Mitglieder der math.-physikal. Classe erwarben seine Grabstätte und liessen dasselbst zu seinem Andenken einen einfachen Stein setzen.

Wir werden des braven Mannes, der der Wissenschaft nach Kräften zu dienen suchte, gerne gedenken; sein Name wird mit der Geschichte der Medizin dauernd verknüpft bleiben.

Edmond Hébert.

Am 4. April 1890 starb im Alter von 78 Jahren zu Paris der Geologe Edmond Hébert. Derselbe nahm durch seine umfassenden Kenntnisse und seinen kritischen Blick einen der ersten Plätze unter den Geologen seiner Zeit ein und galt als das Haupt der französischen geologischen Schule. Während Daubrée die experimentelle und dynamische Geologie in Frankreich vertrat, Delesse in der chemischen und kartographischen Richtung besonders hervorragte, war Hébert in seinem Vaterlande unbestritten als der erste Vertreter der stratigraphischen, paläontologischen und historischen Richtung in dieser Wissenschaft anerkannt. Es gibt in der That kaum eine wichtige Frage auf diesem Gebiete der Gliederung der Schichten der Erdrinde und ihrer Verbreitung, an deren Lösung er sich in seiner langjährigen wissenschaftlichen Thätigkeit nicht mehr oder weniger erfolgreich betheiligt hätte.

Hébert wurde im Jahre 1812 zu Villefargeau, einem Dorfe in der Nähe von Auxerre im Departement Yonne geboren, woselbst sein Vater, ein alter Soldat der Republik und des Kaiserreichs, Pächter eines Landgutes war. Die ersten Studien machte er in der öffentlichen Schule zu Auxerre mit solchem Erfolge, dass man ihn für eine gelehrte Laufbahn und zum Eintritte in die Ecole normale in Paris be-

stimimte. Während er sich zum Eintritte in diese Schule vorbereitete, musste er sich vorerst die hiezu nöthigen Mittel selbst erwerben; er gab daher als 18jähriger Jüngling nach seiner Ankunft in Paris in einer Pension Unterricht im Lateinischen und war dann in einem Institute als Studienaufseher verwendet. Es gelang ihm endlich im Jahre 1833 in die Ecole normale superieure aufgenommen zu werden, in der er, auf's Fleissigste seine Zeit benützend, drei Jahre verblieb. Gleich nach seinem Abgange von dieser Schule erhielt er einen Posten als Lehrer der Physik in der höheren Lehranstalt zu Meaux, wo er sich durch seinen Eifer und sein ruhiges, bestimmtes Wesen so sehr auszeichnete, dass er nach 2 Jahren (1838) an die Ecole normale als Aufsichtslehrer zur Ueberwachung der Disciplin und der Studien der Schüler zurückgerufen wurde. Bis zum Jahre 1857, also volle 19 Jahre, verblieb er in dieser untergeordneten Stellung.

Bei seinen eigenen Studien hatte er sich anfangs vorzüglich mit physikalischen Problemen beschäftigt. Da ihm aber die sitzende Lebensweise nicht zusagte, so unternahm er Ausflüge in die schöne Umgebung von Paris, bei welchen er sich für die Geologie zu interessiren begann, der er sich von 1840 an ausschliesslich widmete. Durch diese Exkursionen, denen sich die Schüler anschlossen, brachte er nach und nach eine ansehnliche Sammlung von Versteinerungen und Mineralien zusammen, welche er von stratigraphischen Gesichtspunkten aus ordnete. Diese Sammlung diente nicht nur zu seiner eigenen Ausbildung in der Geologie, sondern auch zur Belehrung und zu Arbeiten der Schüler; es waren dies die ersten Anfänge der später für die geologischen Studien in Frankreich so erfolgreich gewordenen Schule Hébert's.

Durch die Thätigkeit als Aufsichtslehrer fand Hébert nicht die Zeit eine Doktordissertation zu verfassen; erst 1857 vertheidigte er seine Thesen mit der bemerkenswerthen Abhandlung: „sur la faune des premiers sédiments tertiaires“.

Noch in demselben Jahre wurde er, hauptsächlich in Folge der allgemeinen Anerkennung einer im Jahre 1856 erschienenen Schrift, auf welche wir nachher noch zurückkommen werden, mit den Vorlesungen über Geologie an der Sorbonne betraut und dann mit dem Titel eines Professors der Geologie an derselben an Stelle des verstorbenen Constant Prévost von dem Minister des öffentlichen Unterrichtes angestellt und zwar gegen den Vorschlag der Fakultät, welche sich für Herrn d'Archiac, Mitglied des Institutes, entschieden hatte.

An der Sorbonne gründete Hébert alsbald eine neue Anstalt für Geologie, welche von Anfang an von einer beträchtlichen Anzahl von Schülern besucht war. So entstand seine grosse Schule für Geologie, in der er über 20 Jahre durch seine Vorlesungen, die Arbeiten in der Sammlung und die Exkursionen wirkte. Er besass die richtige Art des Lehrens, indem er seinen Schülern am Objekte zeigte, wie man beobachten müsse und sie bei seinen eigenen Arbeiten mitwirken liess. In liebevollster Weise nahm er Jeden, der es ernstlich mit der Wissenschaft meinte, auf; er wusste alle durch die fesselnden Mittheilungen aus seinem reichen Wissen für die Wissenschaft zu begeistern und zu selbständigen Arbeiten anzuleiten. Auf diese Art gingen viele treffliche Abhandlungen aus allen Theilen der Geologie aus seiner Anstalt hervor: seine Schüler sind jetzt die Lehrer geworden, und es sind fast alle Lehrstühle der Geologie an den Fakultäten Frankreichs von ihnen besetzt.

Die wissenschaftlichen Arbeiten Hébert's sind höchst bedeutende, namentlich auf dem Gebiete der Stratigraphie.

In der ersten Hälfte seiner wissenschaftlichen Thätigkeit beschränkte er sich mit der Erforschung des für die Geologie so merkwürdigen Beckens von Paris, dessen sekundäre, tertiäre und quartäre Bildungen er untersuchte.

Seine ersten Publikationen stammen aus den Jahren 1845 und 1847. In denselben hatte Hébert, namentlich in der Ab-

handlung: *Note sur le calcaire pisalithe*, bereits auf die Wichtigkeit eines Schichtencomplexes hingewiesen, welcher bis dahin völlig verkannt worden war und eine Stellung zwischen den cretacischen und den alttertiären Schichten einnehmen sollte, von ihm jedoch der cretacischen Gesteinsreihe (der Kreide) zugerechnet wurde. Er zeigte mit Herrn de Mercey, dass die Kreideformation des Beckens von Paris trotz ihrer scheinbaren Continuität doch aus einer Anzahl von verschiedenen Schichten besteht, von denen jede ihre besonderen, ihr zukommenden Versteinerungen, namentlich die vorher nicht gekannten verschiedenen Arten des Echinodermengenus *Micraster*, einschliesst. Er hat diese letzteren Formen später bis nach England und Böhmen verfolgt und auch die Analogien der cretacischen Schichten von Mauleon und Gensac mit denen von Maastricht erkannt.

Seine folgenden Untersuchungen befassten sich zunächst mit der Feststellung des Verhältnisses der sogenannten unteren Miocänbildungen der jüngeren Tertiärzeit zu den Eocänablagerungen der älteren Tertiärzeit. Es ist ein ganz wesentliches Verdienst Hébert's, durch minutiöse Beobachtung des Details das Pariser Tertiärbecken in Bezug auf diese Gebilde vollständig in's Klare gestellt zu haben.

Ueber die Juraformation des Beckens von Paris machte Hébert eine grosse Anzahl von Erfahrungen, welche in einer massgebenden Arbeit: *les mers anciennes et leurs rivages dans le bassin de Paris, terrain jurassique* (1856) zusammengefasst sind; in derselben konnte er, im Anschlusse an die in Frankreich herrschenden Ideen der Gebirgshebungen, die zur Jurazeit eingetretenen Schwankungen im Meeresniveau durch eingehende Beobachtungen nachweisen.

Daran schliessen sich mehrere geistreiche und interessante Arbeiten an, in welchen Hébert die Veränderung der Oberfläche und der Bildungsmeere in verschiedenen Perioden bis in die Neuzeit verfolgte. So suchte er zu zeigen, dass die

Sevennen, sowie die subalpine Region und die Provence erst nach der Ablagerung des jurassischen Korallenkalkes erhoben worden sind und ein Festland wurden, über welches der obere Jura sich nicht ablagern konnte. Es knüpfte sich daran ein heftiger Streit mit den Anhängern der Annahme, dass das „Corallien“ nur eine Faciesbildung sei, welche sich allmählich von den Oxfordschichten bis zu den Portlandschichten entwickelt hat.

Ausserdem war Hébert unermüdlich thätig, die Unterscheidung und Feststellung der verschiedenen Unterabtheilungen in den cretacischen und tertiären Schichtenreihen immer exakter zu begründen. In dieser Richtung ist eine vortreffliche Arbeit: *nouvelles observations relatives au calcaire à Lophiodon de Provins* (1862) hervorzuheben.

Bei seinen Studien über die cretacischen und tertiären Schichten in Bezug auf deren feinere Gliederung und vergleichende Altersbeziehungen zu analogen Bildungen ausserhalb des Beckens von Paris und ausserhalb Frankreichs gerieth er bezüglich der Auffassung der Verhältnisse bei der südfranzösischen Kreide in eine leidenschaftlich geführte Controverse mit dem kundigen Marseiller Geologen Coquand und mit dem Grafen d'Archiac, ein Streit, der indess doch für die Klärung der bestrittenen Frage und für die Wissenschaft selbst nicht ohne Früchte blieb.

In ähnlicher Weise heftig wendete sich später Hébert in Bezug auf die sogenannte tithonische Frage gegen die in Deutschland herrschende Ansicht, namentlich in der Abhandlung: *sur les limites de la période jurassique et de la période cretacé et spécialement sur le calcaire à Terebratules diphyæ*. Unser leider so früh verstorbener unvergesslicher College Oppel hatte als ganz junger Gelehrter die marine Zwischenbildung zwischen der jüngsten Jura- und der ältesten Kreideformation, die sogenannte tithonische Stufe, aufgefunden, und es wurde lebhaft darüber gestritten, ob diese tithonische

grosser Tragweite. Bei seinen Reisen in der Bretagne und in der Normandie sowie in der Halbinsel Cotentin stellte er das Vorkommen einer neuen Schicht zwischen dem Gneiss und dem „Cambrien“, die er „Archéen“ nannte, fest; dasselbe hat die gleiche stratigraphische Lage wie das sogenannte „Huronien“ in Canada. In den Ardennen fand er in dem Schichten-complexe zwischen Urschiefer und Steinkohlenformation, zu welchem die ältere silurische und die jüngere devonische Formation gehören, in der letzteren die Ablagerungen von „Gélinien“, welche bis dahin zu der silurischen Formation gezählt wurden.

In der letzten Zeit seines Lebens hat Hébert von Neuem vorzugsweise den Tertiärbildungen, an denen das Becken von Paris so reich ist, seine Aufmerksamkeit zugewendet, wie die vergleichende Studie: „recherches sur le terrain tertiaire de l'Europe meridionale“ zeigt. In Gemeinschaft mit einem seiner besten Schüler, Munier-Chalmas, bereiste er die Südalpen, Norditalien und Ungarn, um die Tertiärformation dieser Länder mit der von Paris zu vergleichen; es ergab sich daraus das Material zu einer seiner bedeutendsten Publikationen: „nouvelles recherches du Vicentin (1878)*“. Ein äusserst sorgfältig durchgeführtes vergleichendes Schichtenprofil der südalpinen Tertiärgebilde mit einer prachtvollen Sammlung von zahlreichen Belegstücken erregte in der Pariser Ausstellung vom Jahre 1873 die Bewunderung aller Sachverständigen. Indem er die stratigraphischen Beziehungen aller dieser Horizonte unter sich feststellte, führte er die Bezeichnung der seitlichen Facies für das tertiäre Terrain ein. Er that dar, dass die Süsswasserschichten von Champigny das Aequivalent von Gypse und die kalkigen Süsswasserschichten von Provins die marinen Schichten des oberen Grobkalkes repräsentiren. Indem er die Ausbreitung der Schichten des Pariser Beckens verfolgte, erkannte er, dass zur tongrischen Zeit sich das Meer einstens bis nach England,

Belgien, in den Norden von Europa, in's Rheinthal bis nach Basel, in die Normandie und in's Rhonebecken bis nach Südfrankreich erstreckte.

Als Hébert seine Arbeiten begann, rangen zwei Anschauungen über die Entstehung der Gebirge mit einander: die Eine liess sie aus gewaltsamen Erhebungen hervorgehen, die Andere dagegen, welche Hébert theilte, aus langsamen Veränderungen. Er gerieth darüber in einen erbitterten Streit mit dem berühmtesten der älteren Geologen Frankreichs, mit Elie de Beaumont; ebenso über die Zugehörigkeit der Nummuliten zur Tertiärformation, über die Gletschertheorien und über die Existenz des Menschen in der Quartärzeit.

Es ist ferner als ein nicht zu unterschätzendes Verdienst Hébert's hervorzuheben, dass er zu den verhältnissmässig wenigen Geologen seines Vaterlandes gehörte, welche es wagten, der in Frankreich lange Zeit herrschenden, so zu sagen, offiziellen Geologie, welche zum Nachtheil einer gesunden und freien Entwicklung der Wissenschaft von den Mitgliedern des Corps des Mines fast als ausschliessliche Domaine beansprucht und von Elie de Beaumont als Alleinherrscher dirigirt wurde, entgegen zu treten.

Hébert versuchte auch mit einigen wenigen Gesinnungsgenossen einen Verein zu bilden, um den von Elie de Beaumont's Einfluss völlig abhängigen offiziellen geologischen Karten andere nach freieren Prinzipien entworfene entgegenzustellen. Er emancipirte sich noch in anderer Weise durch die Gründung einer selbständigen Zeitschrift in Verbindung mit Milne-Edwards, dem Vertreter der Paläontologie: den *Annales des sciences géologiques*, welche seit dem Jahre 1869 bestehen.

In allen seinen Werken erkennt man den sorgfältigen Beobachter und scharfen Diagnostiker, welcher sich nicht darauf beschränkt einfach die Thatsachen zu sammeln, sondern es auch versteht, diese zu weitergehenden Schlüssen geistreich und erfolgreich zu verwerthen.

Seine stratigraphischen Arbeiten haben sich nicht nur nützlich für die Wissenschaft erwiesen, sie fanden auch als baldige Verwerthung für das Aufsuchen der Mineralschätze des Landes, für die Bohrung von Mineralquellen, die Anlage der Eisenbahnen und der Tunnels; für die dereinstige Herstellung eines Tunnels unter dem Aermelkanale wird die Beachtung seiner Unteretagen in der Kreide von grossem Nutzen sein.

Den Verdiensten Hébert's entsprechend waren auch die äusseren Ehren, die ihm zu Theil wurden. Er war seit dem Jahre 1877 Mitglied des Instituts von Frankreich, ebenso Mitglied der Akademie der Wissenschaften in der Sektion für Mineralogie; 1878 wurde er durch Akklamation zum Präsidenten des in Paris tagenden internationalen geologischen Congresses gewählt; drei Male war er Präsident der geologischen Gesellschaft von Frankreich; zwei Male, 1886 und 1889, übertrugen ihm seine Collegen von der Fakultät das Amt eines Dekans.

Mit ihm ist einer der hervorragendsten Gelehrten, der sein Leben ganz im Dienste der Wissenschaft verbrachte, dahin gegangen.¹⁾

Heinrich Will.

Heinrich Will hat sich um die Entwicklung der Chemie grosse Verdienste erworben, sowohl durch seine bedeutenden wissenschaftlichen Arbeiten als auch namentlich durch seine unermüdliche und erfolgreiche Thätigkeit als Lehrer im Laboratorium. Er war einer der Wenigen, welche die wunderbare Zeit im Liebig'schen Laboratorium zu Giessen noch erlebt haben, durch das unstreitig der Grund zu der heutigen Blüthe der Chemie in Deutschland gelegt wurde.

1) Mit Benützung von J. Bergeron, *Revue générale des sciences*, 1890 No. 7 p. 228, und *Discours prononcés sur la tombe de M. Edmond Hébert*.

Will wurde am 8. Dezember 1812 in dem schön gelegenen Städtchen Weinheim an der Bergstrasse geboren. Nach dem frühen Tode des Vaters nahm der Direktor der Lateinschule zu Weinheim, Hofrath Grimm, den aufgeweckten Knaben in sein Haus auf und sorgte in väterlicher Weise für dessen Erziehung. Nach Absolvirung der Lateinschule entschied sich Will für das Fach der Pharmazie; er trat als Lehrling in eine Apotheke des badischen Städtchens Gernsbach ein und war darnach Gehilfe in verschiedenen Apotheken Badens, zuletzt in Heidelberg. Er zeigte sich dabei als einen höchst fleissigen und geschickten Arbeiter, der zugleich Liebe zur Wissenschaft und ein höheres Streben besass. Er benützte daher den Aufenthalt in Heidelberg (1834), um an der Universität Vorlesungen zu besuchen und sich, namentlich in der Chemie, weiter auszubilden.

Dadurch erregte er die Aufmerksamkeit des damaligen Vertreters der Pharmazie an der Universität, des vortrefflichen Lorenz Geiger, der den eifrigen Studenten als Assistent aufnahm. Nach dem im Jahre 1836 erfolgten Tode Geiger's war der berühmte Chemiker Leopold Gmelin erfreut, eine so tüchtige Kraft als Gehilfen gewinnen zu können; aber er sollte nur kurze Zeit in seiner neuen Stellung bleiben. Liebig hatte bekanntlich mit Geiger die verbreiteten Annalen der Pharmazie herausgegeben, welche er nach dem Tode des letzteren allein fortführen musste. Da nun Will bei der Redaktion der Annalen sich Geiger als höchst nützlich erwiesen hatte, so suchte ihn Liebig nach Giessen zu ziehen, um bei der Redaktion der Annalen eine Hilfe zu haben.

Es ist begreiflich, dass Will dem lockenden Rufe nach Giessen Folge leistete, woselbst Liebig schon eine grosse Zahl junger talentvoller Chemiker aus allen Ländern um sich vereinigte und von wo die bedeutendsten Arbeiten ausgingen. Will trat daher als Privatassistent bei Liebig ein.

Hier war der richtige Platz für ihn, an dem er seine Kräfte entfalten konnte, so dass er bald als Forscher sich hervorthat und eine grosse Wirksamkeit als Lehrer gewann.

Durch den Andrang von Schülern war es Liebig allmählich unmöglich geworden, die Leitung des Laboratoriums fernerhin allein zu besorgen und er war genöthiget, sich nach einer Hilfe umzusehen. Er zog Will zuerst zum Unterricht, besonders in der organischen Chemie, heran, und als es ihm gelungen war, das Filiallaboratorium auf dem Selterser Berge einzurichten, übertrug er ihm die Leitung desselben. Zu gleicher Zeit (1844) habilitirte sich Will als Privatdocent an der Universität, nachdem er im Jahre 1839 in Giessen sich den Doktorgrad erworben hatte. Schon im Jahre 1845 erfolgte seine Ernennung zum ausserordentlichen Professor.

In dieser Stellung entwickelte er eine so erspriessliche Thätigkeit bei den Vorlesungen und im Laboratorium sowie auch in der wissenschaftlichen Forschung, dass es bei der Berufung Liebig's nach München (1852) als selbstverständlich erschien, dass Will als Liebig's Nachfolger zum ordentlichen Professor der Experimentalchemie und zum Leiter des Laboratoriums erwählt wurde.

Damit war der Höhepunkt seiner Laufbahn erreicht und ihm ein weites und fruchtbares Feld der Arbeit eröffnet. Volle dreissig Jahre wirkte er in dieser Stellung in vollster Kraft und mit unermüdlichem Eifer; dann aber fühlte er, dass es Zeit sei, jüngeren Schultern die Last zu übertragen, obwohl es dem an intensive Thätigkeit Gewohnten schwer wurde, dem Amte zu entsagen und sich der Ruhe hinzugeben (1882). Nachdem er noch am 1. Mai 1889 unter lebhafter und herzlicher Theilnahme seiner vielen Schüler und Freunde das 50jährige Doktorjubiläum gefeiert und am 28. Juli 1890 der feierlichen Enthüllung des Liebig-Denkmals in Giessen beigewohnt hatte, traf ihn am 15. Oktober ein Schlaganfall, der dem Leben des 78jährigen Greises rasch ein Ende machte.

Noch am 8. Oktober hatte er an seinen alten Freund Pettenkofer geschrieben, er möchte ihn so gerne noch einmal im Leben sehen und grüssen, aber es dürfte dies nicht mehr zu lange verschoben werden, da er den Druck der Jahre in stets wachsender, gerade nicht erfreulicher Weise fühle; wenige Tage darnach hatte er sein Tagewerk vollendet.

Ueberblickt man die wissenschaftliche Thätigkeit Will's, so ersieht man, dass er dadurch in mehreren Richtungen die Chemie wesentlich bereichert hat.

Zunächst liegen von ihm Arbeiten aus dem Gebiete der anorganischen Chemie vor.

Die mit Fresenius (1844) herausgegebenen Untersuchungen über die anorganischen Bestandtheile der Vegetabilien erhellten nicht nur die Bedeutung der Mineralstoffe in den Pflanzen, sondern stellten auch die Methode der Analyse der Pflanzenaschen, namentlich der Bestimmung der darin enthaltenen Phosphorsäure, fest. Man war bekanntlich schon längere Zeit vor ihnen auf die Nothwendigkeit der Mineralstoffe in der Pflanze aufmerksam geworden und namentlich auch darauf, dass die verschiedenen dem nämlichen Boden entsprossenen Pflanzenarten die Aschebestandtheile in sehr ungleichen Mengen aufnehmen. Liebig hatte aber damals die Wichtigkeit und Unentbehrlichkeit der Mineralstoffe für Ernährung der Pflanzen von Neuem betont und den Werth dieser Lehren für die Landwirthschaft mit der ihm eigenen Energie entwickelt. Zur weiteren Einsicht in diese für die Wissenschaft und Praxis gleich wichtigen Verhältnisse mussten viele und genaue Analysen der Aschen der verschiedensten Pflanzen und Pflanzentheile gemacht werden, was Fresenius und Will in ihrer grossen Arbeit übernahmen. Es stellte sich dabei heraus, dass in der That bestimmte Pflanzentheile ganz bestimmte Aschebestandtheile enthalten, so z. B. die meisten Samen fast ausschliesslich phosphorsaure Alkalien und alkalische Erden, die Holzarten und krautartigen Ge-

wächse vorwiegend kohlensaure Alkalien und alkalische Erden, die Halme der Grasarten viel Kieselsäure.

Ebenfalls in Gemeinschaft mit Fresenius veröffentlichte er ein in jeder Hinsicht auf's Genaueste durchgearbeitetes neues Verfahren zur Bestimmung der Pottasche und Soda, der Säuren und des Braunsteins, wobei sie nicht, wie es früher von Gay-Lussac geschehen war, die zur Sättigung des Alkalis nothwendige Menge der Säure ermittelten, sondern die durch die Säure entwickelte Menge von Kohlensäure in einem jedem Chemiker bekannten ausserordentlich einfachen Apparate bestimmten.

Will führte ferner eine grössere Anzahl von genauen Mineralwasseranalysen, zum Theil auch mit Fresenius, aus, wobei er in mehreren eisenführenden Quellen einen Gehalt an Arsen entdeckte.

Eine höchst erspriessliche Förderung hat Will der organischen Chemie gebracht durch die mit Varrentrapp erdachte, einfache und vielfach angewandte Methode der Bestimmung des Stickstoffs in organischen Verbindungen mittelst Natronkalk. Die beiden haben die möglichen Fehlerquellen des Verfahrens sorgsam ermittelt, so dass es bei richtiger Ausführung, trotz mancher Widersprüche von Seiten Unkundiger, die genauesten Resultate liefert.

Eine Reihe trefflicher Untersuchungen Will's galt der Erforschung der Eigenschaften und der Zusammensetzung organischer Verbindungen.

Die erste Arbeit des angehenden Chemikers vom Jahre 1840 war die Auffindung zweier Pflanzenbasen aus *Chelidonium majus* und aus *Veratrum album*, des Chelidonin's und des Jervin's, woran sich eine kleine Untersuchung über den Aether der von Merck aus dem Sabadillsamen dargestellten Veratrinsäure anschloss. Er ermittelte ferner die Zusammensetzung des ätherischen Oels der Raute, welches später zum Ausgangspunkt einer Reihe von Arbeiten anderer Chemiker

wurde; er prüfte das eigenthümliche Verhalten des Jods zum Anis- und Fenchelöl; er untersuchte in einer sehr bemerkenswerthen Arbeit mit Böttger die durch Einwirkung von Salpetersäure auf den Stinkasant erhaltene Styphninsäure, dann die aus der bei Darstellung des Kaliums erhaltenen schwarzen Masse gewonnene Krokonsäure und Rhodizonsäure; er stellte das schwefelsaure Eisenoxydchinin, einen Alaun einer organischen Base, her, und auch eine wichtige Verbindung des Nikotins mit Benzoylchlorid, womit er die Möglichkeit der Vereinigung von tertiären Diaminen mit den Säurechloriden bewies.

Seine weitaus bedeutendsten und für die Erkennung der Constitution organischer Verbindungen folgereichsten Arbeiten sind die über das Senföl. Schon im Jahre 1844 gab er seine Untersuchungen über die Constitution des ätherischen Oeles des schwarzen Senfs heraus, durch welche er Löwig's Angabe bestätigte, dass dieses Oel keinen Sauerstoff enthält, und zugleich darthat, dass es eine Schwefelcyanverbindung des Radikals Allyl sei. Er entdeckte auch eine Anzahl von Abkömmlingen dieses Oels z. B. das durch Einwirkung von Ammoniak daraus dargestellte Thiosinnamin, den ersten einfach substituirten Sulfoharnstoff. Daran reihte sich die Untersuchung einiger Verbindungen des Senfölschwefelwasserstoffes an.

Sehr interessant sind seine mit Körner ausgeführten Versuche über die Entstehung des Senföls in den Samen des schwarzen Senfs, wobei sich die Existenz eines eigenthümlichen ungeformten Fermentes, des Myrosin's, ergab, welches aus den in den Samen enthaltenen myronsauren Kalium ausser dem Senföl noch Zucker, Schwefel und schwefelsaures Kalium abspaltet.

Später wurde von ihm auch der weisse Senfsamen untersucht. Er lehrte dabei einen neuen Bestandtheil desselben kennen, und beschrieb in seiner letzten mit Laubenheimer veröffentlichten Arbeit (1879) das Glucosid des weissen Senf-

samens, das Sinalbin, welches durch das Myrosinferment in Sinalbinsenöl, Zucker und Sinapinsulfat zerfällt.

Allen Chemikern wohlbekannt ist ein aus den bewährten Erfahrungen des Giessener Laboratoriums entstandenes Büchlein Will's: *Anleitung zur chemischen Analyse*, welches 12 Auflagen erlebte und in fast alle lebenden Sprachen übersetzt wurde. Es hat für den ersten Unterricht in der analytischen Chemie ungemein nützlich und anregend gewirkt.

Er hat sich endlich auch ein nicht zu unterschätzendes Verdienst durch seine werktbätige Theilnahme an dem von Liebig und Kopp herausgegebenen *Jahresberichte über die Fortschritte der Chemie* erworben, sowie durch die Uebernahme der Redaktion desselben nach Liebig's Rücktritt im Jahre 1856, welche er bis zum Jahre 1868 fortführte.

Will hat sich, wie schon erwähnt, nicht nur als Forscher in der Chemie einen mit Recht geachteten Namen gemacht, sondern auch, und fast noch mehr, als vortrefflicher Lehrer. Sein Vortrag in den Vorlesungen war von vollendeter Klarheit und fesselnder Darstellung; das grösste Talent besass er jedoch in dem Unterricht im Laboratorium, wo er mit unermüdlicher Ausdauer die Anfänger zum selbstständigen Denken in der Chemie anleitete und die Vorgerückteren in ihren wissenschaftlichen Arbeiten mit Rath und That förderte. Eine sehr beträchtliche Anzahl von Schülern aus Deutschland und dem Auslande, jetzt grösstentheils angesehene Chemiker, sind ihm dafür zu unauslöschlichem Danke verpflichtet: er hat dadurch dem chemischen Unterrichte und damit auch der Ausbreitung und Ausbildung dieser Wissenschaft einen hervorragenden Dienst geleistet. Von Allen, die ihn kannten, war er wegen seines ehrenfesten, geraden Sinnes geliebt: er hat ein glückliches Leben in rastloser und fruchtbarer Arbeit geführt.¹⁾

1) Mit Benützung des Gedenkblattes von A. W. Hofmann, in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft 1890 No. 19.

suchung Liebig's über das Fleisch betheiligen zu dürfen; er führte auch dort seine ersten chemischen Arbeiten aus und darunter auch solche, welche ihm für seine spätere Thätigkeit als Agrikulturchemiker von Nutzen waren.

Nach Beendigung seiner akademischen Studien verbrachte er drei Jahre auf dem heimathlichen Gute, wo er sich ein kleines chemisches Laboratorium eingerichtet hatte, um sich mit der praktischen Landwirthschaft ganz vertraut zu machen, als nothwendige Vorbereitung zu seiner späteren wissenschaftlichen Thätigkeit auf diesem Gebiete. Daran schloss sich eine längere Reise nach England zum Studium der dortigen grossartigen landwirthschaftlichen Einrichtungen an.

Nach seiner Zurückkunft übernahm er im Jahre 1851 eine Anstellung als zweiter Sekretär des landwirthschaftlichen Vereins im Herzogthum Braunschweig, verblieb aber daselbst nur ein Jahr, nach welchem er der Berufung als erster Sekretär der königl. hannoverischen Landwirthschafts-Gesellschaft in Celle folgte.

Hier in Celle begründete er mit anfangs sehr beschränkten Mitteln ein agrikulturchemisches Laboratorium, welches vorzugsweise den Zwecken der praktischen Landwirthschaft dienen sollte. Es war bekanntlich in Folge der Anregungen Liebig's in Möckern bei Leipzig im Jahre 1852 die erste unter der Leitung von Crusius und Wolff blühende landwirthschaftliche Versuchstation in Deutschland errichtet worden mit der Aufgabe unter Anwendung der Naturwissenschaften, besonders der Chemie, die Gesetze der Pflanzen- und Thierproduktion zum Nutzen einer rationellen Landwirthschaft kennen zu lernen, nach deren Muster alsbald viele für die Landwirthschaft so ausserordentlich nutzbringende Anstalten der Art entstanden sind.

Seit 1853 gab Henneberg im Auftrage der Landwirthschafts-Gesellschaft das Journal für Landwirthschaft, verbunden mit einem vorzüglichen Jahresberichte über die Fort-

schritte der Landwirthschaft, heraus; letzterer erschien als Supplement des Journals, unter dem Titel: „Berichte über die Untersuchungen und Erfahrungen auf dem Gebiete der landwirthschaftlichen Pflanzen- und Thierproduktion“ bis zum Jahre 1868. In dem bis zu seinem Tode fortgesetzten Journal finden sich die wissenschaftlichen Abhandlungen Henneberg's bis auf seine ersten, welche grösstentheils in Liebig's Annalen veröffentlicht worden sind. •

Das Laboratorium in Celle bestand bis zum Herbst des Jahres 1857, zu welcher Zeit daraus die landwirthschaftliche Versuchsstation Weende bei Göttingen als Institut der königl. Landwirthschafts-Gesellschaft hervorging. Die Weender Versuchsstation stand bald durch die bedeutungsvollen Arbeiten ihres Vorstandes und seiner Schüler in der vordersten Reihe und sie übte eine solche Anziehungskraft aus, dass sehr viele der jetzt an landwirthschaftlichen Anstalten angestellten Leiter an ihr sich ausgebildet haben und thätig waren.

Neben seinem mühsamen Amte als Vorstand der Versuchsstation wurde er 1865 zum ausserordentlichen und 1873 zum ordentlichen Professor der Landwirthschaft an der Universität Göttingen, später zum königl. preussischen Geheimen Regierungsrath ernannt; 1874 erfolgte die Verlegung der Versuchsstation von Weende nach Göttingen, wo er an der Erziehung tüchtiger Landwirthe erfolgreich mitwirkte.

Henneberg entfaltete an diesen Orten eine ungemein fruchtbare wissenschaftliche Thätigkeit. Sie begann schon 1846 in Jena mit einer in Erdmann's Journal veröffentlichten Untersuchung über das Zirkon; in Liebig's Annalen finden sich mehrere in dem Liebig'schen Laboratorium entstandene Abhandlungen: über einige pyrophosphorsaure Doppelsalze und über phosphorsaure Salze, dann eine in Giessen begonnene und später zu Hause fortgesetzte Arbeit über einige Zersetzungsprodukte des Mellonkaliums, welche ihm (1849) als Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde in

Jena diente. In Giessen führte er noch Analysen der unorganischen Bestandtheile des Hühnerblutes aus, bei welchen er einen Gehalt an Kieselsäure fand, die dazu dient, den Federn des Thieres die nöthige Kieselsäure zu liefern.

Seine Hauptarbeiten bewegten sich jedoch auf dem Gebiete der Ernährungslehre der Wiederkäuer. Schon im Jahre 1849 brachte er in Liebig's Annalen eine für die damaligen Kenntnisse sehr bemerkenswerthe, auf dem Gute Wasserleben an Merinohammeln gemachte Untersuchung: Beiträge zur Ernährung. Man war bekanntlich eine Zeit lang der Meinung, den Nährwerth eines Nahrungsmittels aus seinem Stickstoffgehalte entnehmen zu können; der verdiente französische Landwirth Boussingault, dem wir die ersten praktischen Versuche an Hausthieren über Nahrungsäquivalente verdanken, vermeinte diesen Satz in einer Anzahl von Fällen aus dem Gewichte der Thiere bestätigen zu können, nicht selten zeigte sich aber eine Nichtübereinstimmung zwischen Theorie und Praxis, woraus er schloss, dass der Stickstoffgehalt des Futters nicht der einzige Faktor für den Nährwerth desselben sei. Henneberg fütterte nun die Hammel mit der gleichen Menge von Kleeheu und Weizenstroh unter Zusatz verschiedener anderer Futtermittel. Der ebenfalls aus dem Körpergewichte erschlossene Nährwerth der zu ein und derselben Gruppe gehörigen Nahrungsmittel z. B. der Rüben und Kartoffeln stellte sich in der That proportional dem Stickstoffgehalte, aber nicht der einer anderen Gruppe wie des Kleeheus, in dem bei gleicher Wirkung wesentlich mehr Stickstoff verzehrt wurde. Diese ersten Anläufe lassen schon die späteren Bestrebungen Henneberg's erkennen, aber auch wie sehr sich die Anschauungen über die Ernährung und die Methoden ihrer Erforschung im Laufe von 40 Jahren umgestaltet haben.

An der Versuchsstation zu Weende begann die Thätigkeit, welche seinen Namen bekannt gemacht hat. Zum Ver-

Schweinen liessen nur das Consumvermögen der Thiere für die einzelnen Nährstoffe erkennen und zeigten, mit welchen Futtermischungen eine rasche Mästung zu erzielen war. Ebensowenig kamen die damals an den landwirthschaftlichen Versuchstationen in Deutschland angestellten Versuche über vereinzelte Erfahrungen nicht hinaus. Allerdings hatte Wolff einen wesentlichen Fortschritt gemacht, indem er für die Futterberechnungen ausser dem Gehalte an stickstoffhaltigen Stoffen auch den an stickstofffreien Stoffen berücksichtigte und auch auf die Verdaulichkeit der verschiedenen Futterstoffe aufmerksam machte, wobei er die Rohfaser als unverdaulich von den übrigen organischen Substanzen abzog; er hatte dadurch die Zeit der Fütterung nach chemischen Grundsätzen angebahnt.

Henneberg erkannte wohl bald das Ziel, welches man anstreben müsse, um einen näheren Einblick in die Ernährungsvorgänge zu erhalten und der Praxis zu nützen; er wollte den gesetzmässigen Zusammenhang zwischen Stoffbildung (Fleisch- und Fettproduktion) der verschiedenen Haus-thiere und der Qualität und Quantität des Futters durch Untersuchung der Nahrung und der Exkrete erforschen. Er suchte den physiologischen Werth der Nahrungsmittel festzustellen, indem er den verdauten Theil ihrer Nahrungsstoffe d. i. ihre Ausnützung im Darmkanal ermittelte; als letztes Ziel der landwirthschaftlichen Thierproduktion bezeichnete er mit Vorliebe die Aufstellung von Stoffwechselgleichungen a priori.

Henneberg hatte schon viele Versuche am Rinde in dieser Richtung angestellt, als die von Bischoff und mir am Hunde gemachten Versuche (1860) erschienen, deren Vorläufer die denkwürdige Untersuchung von Bidder und Schmidt über den Stoffwechsel war. Ich hatte vorher für den Fleischfresser die Methode der Ermittlung des Eiweissumsatzes festgestellt und angegeben, wie man eine möglichst einfache und in ihrer Zusammensetzung genau bekannte Nahrung aus

Friedrich Stohmann an Rinde schon gemachten Versuche zu übertragen und bei weiteren Versuchen zu benützen.

Sein mit Stohmann herausgegebenes Hauptwerk hat den Titel: „Beiträge zur Begründung einer rationellen Fütterung der Wiederkäuer“; das erste Heft derselben (1860) beschäftigt sich mit dem Erhaltungsfutter zweier ausgewachsener Ochsen, das zweite (1864) mit der Ausnützung der Futterstoffe durch das volljährige Rind und mit der Fleischbildung im Körper desselben.

Während wir beim Fleischfresser den einfachen Fall des Stoffverbrauchs im Hungerzustande zu Grunde legen konnten, mussten Henneberg und Stohmann beim Pflanzenfresser, da es bei ihm wegen des im Darne in Masse rückständigen Futters nicht möglich ist, den Hungerzustand rein zu beobachten, von dem Nährstoffbedarf bei Erhaltungsfutter ausgehen. Sie wählten zu dem Zweck als voluminöses trockenes, verdauliche Eiweissstoffe nicht über den Bedarf hinaus enthaltendes Futter ein Gemenge von Heu und Stroh, welchem sie dann verschiedene Nährstoffe wie Kleber, Rübol und Stärkemehl zusetzten.

Vorerst aber mussten durch umständliche Versuche die Methoden der chemischen Analyse der complicirt zusammengesetzten Futtermittel sowie des Kothes ausgebildet werden. Den löslichen stickstofffreien Bestandtheilen wurde die jetzt allgemein gebräuchliche Bezeichnung der stickstofffreien Extraktstoffe, der Holzfaser der Namen Rohfaser gegeben; in demselben Sinne sprachen sie von Rohprotein und von Rohfett. Dadurch gelang es ihnen die ersten zuverlässigeren Angaben über die Verdaulichkeit der pflanzlichen Futtermittel bei Wiederkäuern zu machen.

Bei den Untersuchungen über das Erhaltungsfutter fand sich, dass vom Raufutter d. h. vom Heu und Stroh nur etwa die Hälfte des Rohproteins zur Resorption im Darm gelangt, von den stickstofffreien Extraktstoffen 40—68%, von

von Rübol machte eine bessere Verwerthung der Rohfaser und auch eine etwas günstigere des Proteins.

Dabei konnten sie auch die Hauptgesetze des Eiweissumsatzes und des Eiweissansatzes oder der Fleischbildung, wie sie für den Fleischfresser von uns festgestellt worden waren, für den Pflanzenfresser bestätigen. Zunächst den für solche Versuche wesentlichsten Satz, dass aller Stickstoff der im Körper zersetzten stickstoffhaltigen Substanzen im Harn und Koth aus demselben austritt und nicht gasförmig durch Haut und Lunge entfernt wird. Sie fanden beim Ochsen bei Erhaltungsfutter den Stickstoff der Nahrung bis auf 5,8% im Harn und Koth auf, beim Schaf konnte später völliges Stickstoffgleichgewicht der Einnahmen und Ausgaben nach gewiesen werden.

Der Umsatz des Eiweisses steigt und fällt ferner wie beim Hunde mit der Menge der verdauten stickstoffhaltigen Nahrungsstoffe; bei mehr Eiweiss im Futter erscheint dem entsprechend anfangs mehr Stickstoff im Futter bis allmählich unter Eiweissansatz wieder Stickstoffgleichgewicht eintritt. Zusatz von stickstofffreien Stoffen (Kohlehydraten) vermindern den Eiweisszerfall sowie den Eiweissverlust vom Thier und verstärken den Eiweissansatz. Bei absolut mehr Eiweiss in dem Futter und gleichem Verhältniss der stickstoffhaltigen zu den stickstofffreien Nährstoffen ist der Eiweissansatz grösser, wodurch die am Hunde gewonnene Einsicht von der hohen Bedeutung des richtigen Verhältnisses der stickstoffhaltigen zu den stickstofffreien Nahrungsstoffen auch für den Pflanzenfresser sich bestätigte.

Eine reichliche Wasserzufuhr bewirkte eine grössere Stickstoffausscheidung im Harn, also einen verstärkten Eiweisszerfall, wie ich es auch für den Hund zu finden glaubte.

Endlich zeigte sich auch ein Einfluss der Körperbeschaffenheit des Thieres auf den Eiweissverbrauch, indem letzterer wie beim Hunde bei einem schwereren, an Fleisch reicheren Organismus grösser war.

Nahrung steigt und füllt, wobei sich allmählich wieder Stickstoffgleichgewicht herstellt. Wenn ein 500 Kilo schwerer Ochs in der Ruhe eben 250 Gramm Eiweiss täglich umsetzt, bewirkt ein reichlicher Zusatz von stickstofffreien Nährstoffen keinen namhaften Ansatz von Eiweiss, dieser letztere tritt erst bei Steigerung der Eiweisszufuhr ein, jedoch ist wie bei unseren Versuchen die Zunahme des Eiweissansatzes geringer als die Vermehrung der Eiweisszufuhr.

Eine reichlichere Aufnahme von Tränkwasser durch die Thiere rief in der Regel einen grösseren Eiweissumsatz hervor, aber nicht momentan, sondern erst nach einiger Zeit.

Eine Veränderung des Ernährungszustandes des Thieres ergab unter sonst gleichen Umständen wiederum eine entsprechende Veränderung des Eiweisszerfalles.

Die Kohlensäureproduktion stieg und fiel, ebenso wie bei unseren Versuchen am Hund und Menschen, unter sonst gleichen Verhältnissen mit der Zufuhr der stickstoffhaltigen und stickstofffreien Nährstoffe, so dass also der Ansatz von Eiweiss und Fett geringer ist als die Vermehrung der Zufuhr von Eiweiss und Fett in dem Futter.

Es wurde auch dabei für das ausgewachsene Schaf bei Erhaltungsfutter die Vertheilung der Mineralbestandtheile des Futters auf den Harn, den Koth und die Wolle festgestellt.

Es würde viel zu weit führen, wollte ich auf alle die vielen Untersuchungen Henneberg's und ihre Resultate eingehen; ich suchte nur durch Aufzählung der wichtigsten Ergebnisse eine Vorstellung von seiner Wirksamkeit zu geben. Zu seinen eigenen Arbeiten kommen noch die unter seinem Einflusse entstandenen zahlreichen von seinen Schülern in seinem Laboratorium ausgeführten, welche mit dazu beitrugen, die Lehre von der landwirthschaftlichen Thierproduktion zu fördern.

Wenn auch in der letzten Zeit auf diesem Gebiete durch Andere so manches wichtige Neue hinzugekommen ist, durch

heitsliebe auszuführen. Als einen solchen Mann haben Henneberg auch seine Freunde und Schüler gekannt, voll Begeisterung für die Wissenschaft, welche er auch seinen Schülern einzuflößen wusste; sie hatten an ihm das beste Beispiel.

So wie auf die Ausführung seiner Arbeiten konnte man sich auf ihn auch im Leben fest verlassen. Ich habe das Glück gehabt, ihm persönlich näher zu treten und seine trefflichen Eigenschaften kennen zu lernen. Trotz seiner Erfolge strebte er nicht nach äusseren Auszeichnungen, er suchte seine Befriedigung ausschliesslich in der reinen wissenschaftlichen Arbeit; stets bescheiden und anspruchslos, aufrichtigen Sinnes und von geradem Wesen war er in jeder Beziehung ein edler Mensch. Im gewöhnlichen Verkehr war er zwar wortkarg, aber wer ihn näher kannte, wusste den Werth seines Wortes zu schätzen.

Es hat daher Viele die Kunde tief betrübt, dass Henneberg am 22. November 1890 gestorben sei. Schon im Oktober 1889 erlitt er einen Schlaganfall, von dem er sich wieder leidlich zu erholen schien; am 22. November 1890 richtete er sich zu einer Reise, besuchte noch die Räume des Laboratoriums und fuhr Mittags nach dem nahen Greene bei Kreiensen zum Besuche seiner Schwester, wo Abends ein erneuter Schlaganfall seinem Leben ein rasches und sanftes Ende machte, mitten in seinem Schaffen und mitten in neuen Entwürfen zur weiteren Ausgestaltung seiner Arbeiten. Er hat das Glück gehabt, die Neugestaltung der Ernährungslehre seit 40 Jahren zu erleben und durch seine bewundernswerthen Untersuchungen an Wiederkäuern wesentlich an derselben mitzuwirken.¹⁾

1) Nach Vollendung dieses Nachrufes sind Nekrologe über Henneberg erschienen: von Th. Pfeiffer in den landwirthschaftlichen Versuchsstationen vom Nobbe 1891, Bd. 39, Heft 1; und von F. Lehmann im Journal für Landwirthschaft 1890, Bd. 38, Heft 3 u. 4.

eine wissenschaftliche Reise in das sibirische Gebirgsland des Altai, das bis dahin nur sehr wenig bekannt war, zu unternehmen. Die Resultate derselben sind in dem schönen Werke: *Voyage scientifique dans l'Altai Oriental et les parties adjacentes de la Frontière de Chine* (1845) zusammengefasst, einem stattlichen Bande in Quart mit einem Atlas, geologischen Karten, Plänen und Zeichnungen. Im ersten Theile des Werkes werden in höchst lebendigen Schilderungen der Verlauf der Reise, die physikalischen Beobachtungen und die ethnographischen Bemerkungen mitgetheilt; der zweite Theil beschäftigt sich mit den geologischen Beobachtungen, bei deren Bearbeitung Élie de Beaumont und de Verneuil in Paris sowie für die paläontologischen Pflanzenreste der kundige Geppert in Breslau behilflich waren.

Nach Vollendung dieses Werkes, welches ihm alsbald den Ruf eines ausgezeichneten Geographen verschaffte, ging er gleich an die Vorbereitungen zu einem neuen grösseren Reiseunternehmen. Er hatte den lebhaften Wunsch das unter der türkischen Herrschaft damals verödete und schwer zugängliche Kleinasien, die ehemalige Perle des altrömischen Reiches, in naturwissenschaftlicher Beziehung gründlich zu erforschen. Als aber die politischen Verwicklungen den Nachfolger des Ministers Konkrin, Grafen v. Nesselrode, veranlassten ein solches wissenschaftliches Unternehmen unter den damaligen Verhältnissen für unausführbar zu erklären, trat Tschichatscheff die Reise auf eigene Gefahr an. Es kam ihm dabei sehr zu Statten, dass er seinen zweijährigen Aufenthalt in Konstantinopel als Attaché bei der kais. russischen Gesandtschaft benützt hatte, die so nöthigen Kenntnisse der türkischen Sprache und ihrer Mundarten sich zu verschaffen. Mit seinen eigenen Mitteln und nur in Begleitung eines Dieners unternahm er von 1847 bis 1863 fast jährlich von den Ufern des Bosphorus, des Marmarameeres und des mittelländischen Meeres aus grosse Touren durch Kleinasien und

pedition mehr, nur besuchte er im Jahre 1878 in Begleitung seiner Frau das Innere von Algerien und Tunis. Er beschrieb diese Länder in Briefen an seinen Freund, den berühmten Nationalökonom **Michel Chevalier**, welche in dem Buche: *Espagne, Algerie et Tunis* (1880), später auch in deutscher Sprache veröffentlicht wurden.

In hohem Alter beschäftigte er sich noch mit allerlei Ausarbeitungen wissenschaftlicher Fragen und mit Zusammenstellungen des Wissens in den seinem Studium naheliegenden Gebieten. In dieser Art lieferte er einen Abriss der Geschichte der geographischen und naturwissenschaftlichen Kenntnisse in verschiedenen Zeiten in einer Abhandlung: *Etudes de Geographie et d'Histoire naturelle* (1890), und schrieb er in der *Revue des deux Mondes* und der *Revue Britannique* in sehr fesselnder und interessanter Weise über das Naphta in den Vereinigten Staaten und in Russland, über die sibirische Steppe Gobi, über Tibet, über die aralokaspische Tiefebene und die Oase von Merph. Auch übersetzte er das Werk **Grisebach's** über die Vegetationsverhältnisse der Erde unter Zufügung von Eigenbemerkungen, und die Rede **Liebig's** über **Lord Bacon** aus dem Deutschen in's Französische. Eine weit angelegte Arbeit: *les deserts du Globe* wurde durch seinen Tod unterbrochen und blieb unvollendet.

Im hohen Alter von 82 Jahren erlag **Tschichatscheff** einer Lungenentzündung nach kurzer Krankheit zu Florenz, wo er zumeist lebte. In seinem Testamente hatte er der Pariser Akademie der Wissenschaften eine Million Franken vermacht, um damit Reisen in die unbekannten Gebiete Asiens zu unterstützen.

Er besass alle für einen Reisenden in uncivilisirte Länder nöthigen Eigenschaften: ausser ausgebreiteten Kenntnissen eine imponirende Gestalt, eiserne Gesundheit, grosse Energie und Unerschrockenheit in Gefahren. Nur so war es möglich, dass er bei seinen Zügen durch Kleinasien während 8 Jahren

in einem halb barbarischen Lande inmitten einer fanatischen Bevölkerung so bedeutende Erfolge erringen konnte. Er war ausserdem ein Mann von vortrefflichen Charaktereigenschaften, geschätzt von Allen, die ihn kannten. In Anerkennung seiner Verdienste um die Kenntnisse der Erde hatten ihn zahlreiche gelehrte Gesellschaften zu ihrem Mitgliede erwählt, ausser unserer Akademie, deren correspondirendes Mitglied in der Abtheilung für allgemeine Naturgeschichte er seit dem Jahre 1866 war, die kais. russische Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, die k. preussische Akademie zu Berlin und das Institut von Frankreich in der Sektion für Geographie.¹⁾

1) Mit Benützung des Nekrologes von J. J. Stabnitzk, vorgetragen in der Sitzung der kais. russischen geographischen Gesellschaft am 7. November 1890.

Sitzung vom 2. Mai 1891.

1. Herr E. LOMMEL hält einen Vortrag: „über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes“.

2. Herr L. v. SEIDEL legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Sebastian FINSTERWALDER, Privatdocent der Mathematik an der technischen Hochschule dahier: „die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder, auf Grund der Seidel'schen Formeln untersucht“ vor. Die Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

Ueber die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes.

Von E. Lommel.

(Eingeleitet von P. Drude.)

Die schönen Versuche des Herrn Wiener.¹⁾ durch welche derselbe die Existenz stehender Lichtwellen nachwies, haben auch die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes wieder in den Vordergrund des Interesses und der Discussion²⁾ gerückt. Ich nehme hievon Anlass, an von mir vor längerer Zeit mitgetheilte Versuche³⁾ zu erinnern, welche die letztere Frage berühren. Lassen sich auch diese einfachen Beobachtungen mit den sinnreichen Experimenten Wiener's an Verdienst nicht vergleichen, so führen sie doch diese Frage mindestens ebensoweit, ja sogar weiter, der Lösung entgegen, als die Wiener'schen Versuche.

Seit Fresnel und Arago steht fest, dass in einem isotropen Mittel die Lichtschwingungen senkrecht zum Strahl in der Wellenebene erfolgen, und dass dieselben im gerad-

1) Wiener, Wied. Ann. 40. p. 203. 1890.

2) P. Drude, Wied. Ann. 41. p. 154. 1890. A. Cornu, C. R. 112. p. 189, 365. H. Poincaré, ib. p. 325, 456. A. Potier, ib. p. 383. J. de phys. (2) 10. p. 101. 1891.

3) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 634. 1879.

linig polarisirten Licht in einer durch den Strahl gelegten Ebene stattfinden, welche zu der experimentell stets gegebenen Polarisationsebene entweder senkrecht steht, oder mit ihr zusammenfällt. Von der Lichtschwingung selbst wissen wir aus der Erfahrung nur, dass sie in einem periodisch veränderlichen Zustand besteht, der sich in einem Substrate von unbekannter Beschaffenheit wellenartig fortpflanzt.

Die verschiedenen Theorien des Lichtes unterscheiden sich von einander durch die Annahmen, welche sie über die Eigenschaften des fortpflanzenden Mittels machen. Welcher Art aber auch diese Hypothesen sein mögen, so sind doch die aus ihnen abgeleiteten partiellen Differentialgleichungen, welche den Vorgang der Fortpflanzung transversaler Schwingungen beschreiben sollen, von derselben allgemeinen Form. Aus diesen Gleichungen folgt aber, dass mit jeder solchen Schwingung eine in der Wellenebene zu ihr senkrecht gerichtete ebenfalls periodisch veränderliche Grösse von gleicher Schwingungsdauer und proportionaler Intensität untrennbar verknüpft ist, welche mit demselben Recht wie jene als „Schwingung“ bezeichnet werden kann. In den elastischen Lichttheorien sind diese beiden zu einander senkrechten Richtungsgrössen (Vektoren) einerseits die Verschiebung der Aethertheilchen, andererseits die Aenderung der die Fortpflanzung bewirkenden elastischen Kraft; in der elektromagnetischen Lichttheorie die elektrische Schwingung und die dazu senkrechte magnetische Schwingung.

Das theoretisch geforderte Vorhandensein zweier verschiedener, vom analytischen Standpunkt aus gleichwerthiger, Richtungsgrössen wird man daher auch bei Ueberlegungen, welche sich an Erfahrungsthatfachen knüpfen, zu berücksichtigen haben.

Die Thatsache der Polarisation aber beweist, dass diese beiden Richtungsgrössen, von denen die eine in der Polari-

Das rothe Magnesiumplatincyanoür, welches in schön ausgebildeten quadratischen Säulen krystallisirt, zeigt dichroitische Fluorescenz, welche besonders schön hervortritt, wenn man sie mit an sich lichtschwachem aber stark erregendem violettem Licht hervorruft.

Erregt man mit polarisirtem Licht, indem man das einfallende violette Strahlenbündel, nachdem es durch ein Nicol'sches Prisma gegangen ist, senkrecht auf eine Seitenfläche des Krystalles treffen lässt, so strahlt die belichtete Fläche scharlachrothes Fluorescenzlicht aus, wenn die Polarisations-ebene des einfallenden Lichtes zur Hauptaxe des Krystalles parallel steht, dagegen orangegelbes Fluorescenzlicht, wenn die Polarisations-ebene zur Krystallaxe senkrecht steht.

Durch ein zweites Nicol betrachtet, erweist sich das ausgestrahlte Fluorescenzlicht für die genannten beiden Hauptstellungen des ersten Nicols jeweils in demselben Sinne polarisirt wie das erregende Licht, nämlich das scharlachrothe parallel zur Krystallaxe, das orangegelbe senkrecht zu ihr.

Mit dem Spectroskop untersucht, zeigt das scharlachrothe Fluorescenzlicht ein Spectrum, welches von der Wellenlänge $\lambda = 0,650\mu$ bis zu $\lambda = 0,578\mu$ reicht und im Orangeroth etwa bei $\lambda = 0,600\mu$ ein Maximum der Lichtstärke besitzt; das Spectrum der orangegelben Fluorescenzfarbe dagegen erstreckt sich von $\lambda = 0,640\mu$ bis $\lambda = 0,562\mu$, und erhebt sich im Gelb bei $\lambda = 0,578\mu$ zu einem Maximum.

Wir lassen jetzt das horizontale polarisirte Bündel violetten Lichtes auf die Basisfläche des quadratischen Prismas senkrecht treffen, indem wir den Krystall so aufstellen, dass seine Hauptaxe mit der Richtung der einfallenden Strahlen zusammenfällt (Anfangsstellung). Die Basisfläche leuchtet nun mit scharlachrothem Fluorescenzlicht (Spectrum bis $\lambda = 0,578\mu$), welches unpolarisirt ist, und seinen Farbenton nicht ändert, wenn man den Krystall oder das Nicol um die Strahlenrichtung als Axe dreht.

ausgestrahlte Fluorescenzlicht mit dem erregenden Licht jeweils parallel polarisirt ist.

Es folgt daraus, dass auch der Lichteindruck einer geradlinig polarisirten Lichtwelle in unserem Auge durch Schwingungen hervorgebracht wird, welche zur Polarisations-ebene senkrecht stehen.

Andrerseits hat Wiener den experimentellen Nachweis geliefert, dass die chemisch wirksamen Schwingungen einer geradlinig polarisirten Lichtwelle zur Polarisations-ebene senkrecht stehen.

Da für die Wärmewirkungen einer Lichtwelle die Polarisations-ebene dieselbe Lage hat wie für ihre Lichtwirkungen, da ferner die Phosphorescenz von der Fluorescenz im Wesen nicht verschieden ist, so dass beide von E. Wiedemann passend unter der Benennung „Luminescenz“ zusammengefasst werden, so ist hiemit für alle Lichtwirkungen, optische, thermische, chemische und Luminescenz-Wirkungen experimentell bewiesen:

Die Lichtschwingungen stehen zur Polarisations-ebene senkrecht.

Hiemit ist aber nur die erste unserer beiden Fragen erledigt, und zugleich dargethan, dass alle bekannten Lichtwirkungen nur von dem zur Polarisations-ebene senkrechten Schwingungszustand bedingt sind; von vorneherein wäre ja immerhin denkbar gewesen, dass etwa die optischen Wirkungen von der einen, die chemischen Wirkungen von der anderen dazu senkrechten periodischen Grösse abhängig wären.

Die zweite Frage dagegen, ob die Verschiebung der Theilchen des Mediums selbst oder der zu ihr senkrechte Schwingungszustand die wirksame Lichtschwingung ist, bleibt dabei noch offen; für die elastischen Lichttheorien z. B. ist

in der That von Troughton¹⁾ und von Klemenčič²⁾ ausgeführt worden, welche beweisen, dass die trischen Verschiebungen („displacements“) zur Polarisations-ebene senkrecht stehen. Nimmt man daher an, dass Lichtwellen mit den elektrischen Wellen dem Weser übereinstimmen, so ergibt sich wiederum, dass die Verschiebungen des fortpflanzenden Mittels zur Polarisation senkrecht stehen.

1) Troughton, Nature 39. p. 393. 1889.

2) Klemenčič, Wiener Berichte, Feb. 19, 1891.

Sitzung vom 6. Juni 1891.

Herr C. v. VOIT machte weitere Mittheilungen über die in seinem Laboratorium seit längerer Zeit in Gang befindlichen Untersuchungen „über die Glykogenbildung nach Aufnahme verschiedener Zuckerarten“. Dieselben sollen in der Zeitschrift für Biologie veröffentlicht werden.

Sitzung vom 4. Juli 1891.

1. Herr H. SEELIGER bespricht eine von der Kopenhagener Akademie mit der goldenen Medaille gekrönte Arbeit des Herrn Dr. Eduard Frhrn. v. HAERDTL, Dozenten für Astronomie an der k. k. Universität zu Innsbruck: „Skizzen zu einem speziellen Fall des Problems der drei Körper“. Dieselbe soll in die Denkschriften aufgenommen werden.

2. Herr W. v. GÜMBEL legt eine Abhandlung des auswärtigen Mitgliedes, Herrn Prof. Dr. F. v. SANDBERGER in Würzburg, vor: „über den Erzgang der Grube Sagra

Familia in Costarica und dessen Bedeutung für die Theorie der Erzgänge“.

3. Herr W. DYCK überreicht eine Abhandlung des correspondirenden Mitgliedes der Classe, Herrn Prof. Dr. Alex. BRILL in Tübingen: „über das Verhalten einer Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle“.

Der Erzgang der Grube Sagra Familia in Costa Rica und dessen Bedeutung für die Theorie der Erzgänge.

Von F. v. Sandberger.

(Eingelaufen 4. Juli.)

Die Gebirge der Republik Costarica (Central-Amerika) sind nach den bisherigen Forschungen aus verschiedenen Gesteinen. Als ältere werden Granit und krystallinische Gesteine angegeben, von welchen goldhaltige Alluvionen abfließen, die früher ergiebig gewesen sein müssen, da Gold in alten Indianer-Gräbern in nicht unbeträchtlicher Menge gefunden worden ist.¹⁾ Bergbau auf Gold scheint in diesem Gebiete nicht betrieben worden zu sein. Die Gesteine, welche jene an vielen Orten durchbrochen sind und unter sich wieder von verschiedenem Alter. Hornblende-Andesiten, die z. B. am Vulkane Chiriqui²⁾ vorkommen, zuweilen aber auch Augit und Quarz enthalten,³⁾

Wagner, Naturwissensch. Reisen im tropischen Amerika,

. daselbst S. 254 ff.

Übel. Diese Sitzungsber. 1881 S. 357.

kommen reine Augit-Andesite von basaltähnlichem Habitus¹⁾ vor, jenen ähnlich, welche M. Wagner²⁾ in der Umgebung des Cotopaxi gefunden hat. In der mir vorliegenden Literatur ist aber nirgends die Rede von dem Vorkommen letzterer Gesteine in den Urwäldern des westlichen, dem Stillen Ocean zugekehrten Theiles von Costarica, wo sie indess offenbar eine wichtige Rolle spielen. Man wurde erst auf sie aufmerksam, als 1866 ein Erzgang in ihnen entdeckt wurde, der sich als goldhaltig erwies. Es bildete sich ein Consortium, welches unter Leitung des schon vor längerer Zeit verstorbenen trefflichen Bergingenieurs L. Eich aus Oberhessen zwei Jahre lang auf demselben Bergbau betrieb. Die „Sagra Familia“ benannte Grube liegt, eine Tagereise von der Stadt Esparsa entfernt, einsam im dichten Urwalde. Das am Ausgehenden mit anderen Zersetzungsproducten der Gangmasse gefundene hochsilberhaltige Gold wurde natürlich in der Teufe nicht mehr getroffen, sondern es traten hier Schwefelmetalle an dessen Stelle, welche behufs der Amalgamation aufbereitet und geröstet werden mussten, aber eine wesentlich geringere Ausbeute ergaben. Die Grube wurde daher, wie mir die s. Z. dort wohnende Wittwe des ehemaligen Leiters mittheilte, 1868 aufgegeben.

Die merkwürdige Mineralassociation, welche den Gang ausfüllt, hatte mich schon bei der ersten Besichtigung der Eich'schen Sammlung lebhaft interessirt³⁾ und ich habe daher die Gelegenheit wahrgenommen, letztere für das unter meiner Leitung stehende mineralogisch-geologische Institut der Universität Würzburg zu erwerben. Schriftliche Aufzeichnungen über die Grube Sagra Familia fanden sich im Eich'schen Nachlasse nicht mehr, was sehr zu bedauern ist.

1) Ders. daselbst S. 362 ff.

2) A. a. O. S. 531 ff.

3) Jahrb. f. Min. 1874 S. 174.

gut die Flächen $\infty \bar{P} \infty \cdot \infty' P \cdot \infty P' \cdot oP$ und $\bar{P} \infty$, stets in deutlicher Verwachsung nach dem brachydiagonalen Flächenpaare. Sie schmelzen vor dem Löthrohr unter rothgelber Färbung der Flamme zu weissem blasigem Email und werden beim Kochen von concentrirter Salzsäure völlig zersetzt, sind demnach Labradorit.

Der Augit erscheint in kleinen, nur im frischesten Kerne noch grünlich schwarzen Krystallen der Combination $\infty P \cdot \infty P \infty \cdot \infty P \infty \cdot P$, welche gewöhnlich zu Zwillingen nach $\infty P \infty$ verbunden sind, er lässt ausser den gewöhnlichen Bestandtheilen einen nicht unbeträchtlichen Gehalt an Mangan bemerken. Magneteisen ist, wie schon oben erwähnt, sehr gewöhnlich in ihm eingewachsen.

Das Gestein ist also ein mikroporphyrischer quarzhaltiger Augit-Andesit, welcher in Bezug auf seine Zusammensetzung, in welcher manganhaltiger Augit und Labradorit die wichtigste Rolle spielen, schon länger bekannten des ungarisch-siebenbürgischen Erzgebirges z. B. aus der Gegend von Nagyag, Felsöbanya, Nagybanya u. s. w. ungemein nahe steht,¹⁾ die dort nicht mit solchen durch Uebergänge verbunden sind, die statt des Augits manganhaltige Hornblende führen, wie z. B. der Andesit von Kapnik. Die häufige Umsetzung des Augits zu Delessit und Kalkspath bedingt aber auch eine gewisse Aehnlichkeit mit manchen Augit-Porphyren²⁾ und Melaphyren.

Von grossem Interesse ist das chemische Verhalten des Gesteins. Kocht man das Pulver desselben einen Tag lang mit destillirtem Wasser aus und lässt es dann längere Zeit stehen, so hat das Wasser die löslichen Salze, vorwiegend schwefelsaures Natron, aber auch etwas Chlornatrium, voll-

1) Ich konnte mich hiervon an einer Suite überzeugen, welche ich vor Jahren von Herrn Prof. v. Szabo in Pesth erhielt.

2) Kjerulf Christiania-Silurbecken S. 21 f.

ständig gelöst und dieselben sind dann leicht nachzuweisen. Zugleich geht aber auch organische Substanz in Lösung und scheidet sich am Rande der Schale als brauner Ueberzug wieder ab. Ebenso deutet das Verhalten im Glührohre auf ziemlich viel organische Substanz, welche vermuthlich einem Körper aus der Ulminreihe angehört, da neben Wasserdampf starker, dem Paraffin ähnlicher Geruch zu bemerken ist.

Mit kalter Salzsäure entwickelt das Gesteinspulver Kohlensäure, von dem bereits oben erwähnten Kalkspath herrührend, aber keinen Schwefelwasserstoff, der auch beim Erwärmen ebensowenig auftritt, als rothe Dämpfe bei Einwirkung von Salpetersäure. Fertig gebildete Schwefelmetalle sind daher im Gesteine nicht vorhanden.

Salzsäure zersetzt das Pulver bei fortgesetztem Kochen völlig und hinterlässt nur pulverige Kieselsäure und Quarzsplitter, welche beim Reiben mit dem Glasstabe knirschen. Beim Schlämmen bleiben auch nur diese, aber kein Zirkon, Rutil oder Turmalin zurück.

Die Lösung enthielt nach der relativen Menge geordnet: Kieselsäure, Kalk, Natron, Eisenoxydul und Oxyd, Thonerde, Mangan, Titansäure, Phosphorsäure, Kupferoxyd, Antimon, Arsen, Zink, Magnesia, Kali, Blei und Baryt. Silber und Gold waren auf diesem Wege in 10 g nicht zu entdecken. Fast alle diese Elemente treten in mannigfaltigen Verbindungen auf dem Erzgange auf.

Ehe dieser aber genauer besprochen wird, mag es nützlich erscheinen, ein in mehreren Abänderungen in der Nähe, an einem Pina grande benannten Fundorte beobachtetes Gestein zu erwähnen, in welchem aber kein Erzgang erschürft wurde. Die frischeste desselben ist tief schwarzgrau, noch sehr hart = 6, gibt im Glührohre nur ganz wenig Wasser ab und entwickelt keinen brenzlichen Geruch, ebensowenig braust sie mit kalter Salzsäure. Der Habitus ist aber ganz jener des Gesteins von Sagra Familia, nur fehlt

der Quarz im Gemenge gänzlich. Die Augite sind grösser und Delessit-Mandeln seltener und dunkler gefärbt als in jenem. Die Augite zeigen durchweg die Combination $\infty P \infty \cdot \infty P \cdot \infty P \infty$ mit bald stärkerer bald geringerer Entwicklung von P; Zwillinge sind weniger häufig zu bemerken. Mangan ist in ihnen nicht zu entdecken. Der Schliff ist jenem des ersten Gesteins im höchsten Grade ähnlich, nur ist Glas in der Zwischenmasse und in den Feldspathen reichlicher vorhanden. In der salzsauren Lösung des Gesteins fehlen Mangan, Zink, Kupfer, Antimon und Arsen gänzlich, die übrigen Bestandtheile sind dieselben wie oben.

Die zweite aschgraue Varietät ist schon etwas zersetzt und braust mit kalter Salzsäure, der Feldspath erscheint durchweg angegriffen und matt, die Augite sind zum Theil noch frisch, zum Theil in Delessit umgewandelt, welcher auch in grösseren und kleineren Mandeln zu beobachten ist. Ausserdem treten aber bis haselnussgrosse Ausscheidungen eines weissen fast dichten, nur stellenweise verworren strahligen Minerals auf. Dasselbe gibt im Glührohre ziemlich viel Wasser ab, schmilzt vor dem Löthrohre nach vorherigem Aufblähen unter intensiv rothgelber Färbung der Flamme zu weissem blasigem Email und gelatinirt mit heisser Salzsäure ausgezeichnet. Ich kann es daher nur für Mesotyp halten, wofür auch die Härte spricht. Der stark angegriffene Zustand des Feldspaths (Labradorits) lässt nicht bezweifeln, dass sich dieser Zeolith auf Kosten desselben gebildet hat.

Noch stärker zersetzt ist die dritte schmutzig röthlichgraue, thonig riechende und weiche Varietät, ein wahrer, von Hunderten erbsengrosser Mesotyp-Mandeln erfüllter Mandelstein, in dessen weicher Grundmasse die Augite und Feldspathe nur noch an den Umrissen ihrer Krystallformen zu erkennen sind. M. Wagner erwähnt bereits ein solches Gestein aus der Nähe der Panama-Eisenbahn.

II. Die Ausfüllung des Ganges.

Nach dieser Abschweifung kehre ich zu der Besprechung des Ganges zurück, dessen Mächtigkeit nach den vorliegenden Stücken zu schliessen höchstens 0,2 m betragen zu haben scheint, und gebe zunächst eine Anzahl von Beispielen für die Paragenesis desselben.

1. 1) Grobkörniger weisser Kalkspath I, in Drusen im Grundrhomboeder krystallisirt und häufig überzogen von einer Lage von 2) lichtem Braunspath. 3) Quarz II in drusigen Ueberzügen. 4) Weisser Aragonit in strahlig gruppirten Nadeln.

2. 1) Derselbe Kalkspath im Gemenge mit graulich-weissem Quarz I mit eingesprengten Kiesen, der ihn an vielen Stellen völlig verdrängt. In Drusen 2) Quarz II ($\infty R + R$) überzogen von Wad und jüngstem Kalkspath III ($-2R$).

3. 1) Weisser Quarz im Gemenge mit 2) viel Rosenspath. In Drusen über letzterem 3) Quarz II ($\infty R + R$). 4) Manganocalcit in rosenrothen Büscheln.

4. 1) Zersetzter Rosenspath. 2) Quarz II stellenweise mit Hervorragungen tafelartiger, jetzt ganz von ihm verdrängter Krystalle (Schwerspath?). 3) Manganbraunspath (R) in Gruppen und in hohlen Pseudomorphosen nach Kalkspath II ($-2R$).

5. 1) Weisser Quarz mit eingesprengten Schwefelmetallen (Fahlerz, Zinkblende, Kupferkies) in zusammenhängenden Lagen oder in unregelmässig gestalteten Nieren, welche von 2) Rosenspath mit denselben Erzen rings umgeben stellenweise eine ausgezeichnete Cocarden-Structur annehmen. In Drusen über 3) Quarz II. 4) Manganbraunspath (R) und Büschel von Manganocalcit.

8. Enargit. Findet sich nur an einem Gangstücke derb und in Verwachsung mit der gleich zu besprechenden Zinkblende. Das Verhalten des Erzes im Glührohre und seine deutliche Spaltbarkeit lässt über die Natur desselben keinen Zweifel. Es enthält neben Kupfer, Arsen und Eisen auch Blei, und zwar wie es scheint etwas mehr als der Enargit der Sierra Famatina in Argentinien.

9. Zinkblende. Tief schwärzlichbraun, in dünnen Blättchen mit honigbrauner Farbe durchsichtig, kommt dieselbe in grob krystallischen Massen von hohem Glanze und ausgezeichneter Spaltbarkeit vor und bildet mit den vorstehend geschilderten Schwefelmetallen gemengt Erzmittel. Sie ist eigenthümlich zusammengesetzt und namentlich durch einen höheren Mangangehalt ausgezeichnet, als ich ihn bisher in Blenden beobachtet habe,¹⁾ daneben auch wie der Enargit durch einen kleinen Gehalt an Blei, der von Einmengungen nicht herrühren kann, da Bleiglanz auf dem Gange gänzlich fehlt. Sonst enthält die Zinkblende Zink, Eisen und etwas Cadmium, wie gewöhnlich, Silber und Zinn wurden nicht nachgewiesen und Kupfer nur in Spuren.

10. Gyps, meist mit Malachit oder Kupferlasur gemengt, erscheint in Form kleiner stark in der Richtung der Hauptaxe verlängerter Nadeln $\infty P - P \cdot \frac{1}{3}P\infty$, ist aber in Folge seiner Löslichkeit in Wasser nur in geringer Menge erhalten geblieben.

11. Kupferlasur. In kleinen Drusen über Malachit auf zersetztem Enargit oft in prächtig blauen, aber kleinen Krystallen $\infty P \cdot oP \cdot \frac{1}{3}P\infty$, $\infty P\infty$ ist kaum angedeutet.

12. Malachit. In dünnen Ueberzügen auf demselben Schwefelmetalle, häufiger aber auf Kupferkies, sowie auf ge-

1) Den höchsten (2,66⁰/o) hat man in der schwarzen Blende von Breitenbrunn (Christophit Breith.) gefunden, welche auch in Cornwall und bei Villeder (Dép. Morbihan) vorkommt.

Wie man sieht, sind auf dem Gange sämmtliche im Nebengesteine nachgewiesenen Elemente mit Ausnahme der Thonerde, Titansäure und der Alkalien in Form von freier Kieselsäure, sowie von kohlensauren und Schwefel-Verbindungen wieder zur Ablagerung gekommen und zwar in bestimmter Reihenfolge. Die Hauptmasse des verfügbaren Kalkes findet sich im älteren Kalkspath, die bei Zersetzung des Feldspaths abgeschiedene Kieselsäure im Quarz I wieder, doch blieben Lösungen derselben auf dem Gangraume noch längere Zeit zurück, welche theils mit anderen Elementen, namentlich Manganoxydul und Eisenoxydul zur Bildung anderer Verbindungen verbraucht wurden, theils selbstständig als jüngere Kalkspathe und Quarze wieder zum Vorschein kommen. Der jüngere Quarz erscheint stets in der auf den Schemnitzer Gängen allgemein verbreiteten Form. Das Manganoxydul, welches den reichlich vorhandenen Rosenspath (s. oben), einen der charakteristischsten Bestandtheile des Erzgangs geliefert hat, ist schwerer löslich als der kohlensaure Kalk und erscheint deshalb später im Gangraume. Es rührt hier ebenso zweifellos aus manganhaltigem Augit her, wie anderswo z. B. zu Kapnik, Schemnitz, Vöröspatak, Offenbanya u. a. O. aus manganhaltiger Hornblende und auf gewissen Freiburger Gängen aus manganhaltigem Glimmer. Reines Schwefelmangan, welches anderwärts z. B. zu Offenbanya, Kapnik und Nagyag, in Mexico u. s. w. den Manganspath begleitet, kommt auf Sagra Familia nicht vor, wohl aber eine ungewöhnlich hoch manganhaltige Zinkblende.

Da sich im Nebengesteine reichlich schwefelsaures Natron und organische Substanz befindet, so waren alle Bedingungen zur Bildung von Schwefelnatrium vorhanden. Die Schwermetalle, welche vermuthlich als kieselsaure oder kohlensaure Salze aus dem zersetzten Nebengesteine auf den Gangraum geführt wurden, konnten daher alsbald als Schwefelmetalle niedergeschlagen werden und müssen schon darum auf diesem

Die Vergleichung des Ganges von Sagra Familia mit jenen von Schemnitz, Felsöbanya, Kapnik, Nagyag, Vöröspatak und gewissen Nevadas (Austin) und Mexicos, welche ebenfalls reichlich kohlen-saures und kieselsaures Manganoxydul nebst übereinstimmenden Erzen führen und in Andesiten mit manganhaltiger Hornblende¹⁾ oder Augit aufsetzen, ergibt die allergrösste Aehnlichkeit, die man ja in jeder grösseren Sammlung leicht constatiren kann. Nur der sonst überall vorkommende Bleiglanz ist auf Sagra Familia nicht vertreten. In älteren Gesteinen kommen Gänge mit ähnlicher Art der Ausfüllung nur äusserst selten vor, wie manche bei Freiberg. Es wäre gewiss am Platze, diese unter dem Namen „Manganspath-Formation“ zu vereinigen und als besondere Abtheilung von Breithaupt's „klinoödritischer Blei-Zink-Formation“ zu unterscheiden.

Was die secundären Mineralien der oberen Teufe betrifft, so ergaben sich kaum besonders interessante Thatsachen. Die kupfer- und bleihaltigen Erze liefern wie gewöhnlich zunächst schwefelsaure Salze, welche durch den reichlich vorhandenen kohlen-sauren Kalk in Gyps und kohlen-saure Metalloxyde umgesetzt werden. Die edlen Metalle scheiden sich, weil unoxydirbar, als Silbergold ab, ein Theil des Malachits mag wohl durch reichlich vorhandene organische Substanz zu gediegenem Kupfer reducirt worden sein, da älteres Rothkupfererz, welches etwa durch Schwefelsäure in schwefelsaures Kupferoxyd und gediegenes Metall gespalten worden sein könnte, auf dem Gange nicht nachzuweisen war. Das kohlen-saure Manganoxydul geht durch Oxydation zu Hyperoxyd in Wad über. Nur ein Theil des Kupfers ist auch mit ebensolchem Hyperoxyd zu einer Verbindung, dem Kupfermanganerz zusammengetreten. Damit glaube ich die Verhältnisse des Ganges vollständig erläutert zu haben.

1) Die manganreichste von diesen (8% MnO) ist wohl Breithaupt's Gamsigradit (Berg- u. Hüttenmänn. Zeitung XX. S. 33).

Ueber das Verhalten einer Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle.

Von A. Brill in Tübingen.

(Eingelaufen 4. Juli.)

Das Verfahren, nach welchem man eine algebraische Function von einer Veränderlichen in der Nähe einer Stelle, wo sie einfach oder in höherer Ordnung verschwindet, in Potenzreihen zu entwickeln pflegt, rührt bekanntlich von Newton her, der in der Abhandlung „Analysis per quantitatum series, fluxiones“ etc. gelegentlich der Auflösung numerischer Gleichungen auch den Fall betrachtet, dass die Coefficienten einer Gleichung nicht Zahlen, sondern von einer Veränderlichen (*species indefinita*) abhängige Grössen sind. Danach nimmt jede Wurzel die Form einer nach ganzen oder gebrochenen Potenzen der Variabeln fortschreitenden Reihenentwicklung an; die Coefficienten lassen sich durch Einsetzen bestimmen, wenn zuvor die Bruchformen der Exponenten mit Hilfe des bekannten Parallelogramms ermittelt sind.

Neuere Arbeiten haben sich mit dem Nachweis des Convergenzbereiches dieser Reihen und mit der Beseitigung des Parallelogramms beschäftigt, aber die Grundlage unberührt gelassen. Indessen ist das Newton'sche Verfahren ein indirectes und steht gegenüber einem, das mit identischen Umformungen operirt, in mancher Hinsicht zurück.

Wenn man jede Wurzel ohne Rücksicht auf die bereits gefundenen für sich bestimmt, so bedarf es, bei strenger Behandlung, nachträglich des Beweises der Vollzähligkeit; im Falle einer irreducibeln Gleichung des mühsamen Nachweises, dass alle verschieden sind u. s. w. Dies wird entbehrlich, wenn man jene Reihenentwicklungen nicht durch Verification vorläufiger Annahmen herstellt, sondern durch identische Zerlegung der linken Seite derjenigen Gleichung

$$F(xy) = 0,$$

die in der Umgebung der Stelle, für welche die ganze Function F von x und y verschwindet, y als algebraische Function von x definirt, wobei denn, wenn etwa $x = 0$, $y = 0$ diese Stelle ist, soviele Linearfactoren von der Form:

$$y = \mathfrak{P}(x)$$

entstehen — unter \mathfrak{P} eine mit x verschwindende Potenzreihe verstanden — als Entwicklungen von y nach Potenzen von x existiren, die jene Gleichung befriedigen.

Soviel ich weiss, hat man eine solche directe Zerlegung noch nicht versucht, wiewohl der Gedanke nahe liegt und auch für die Theorie der Functionen von zwei Veränderlichen verwerthbar ist. Eine gewisse Schwierigkeit, der man gleich anfangs begegnet, führte mich auf einen für die Functionentheorie bedeutsamen Satz, der, wie ich später bemerkte, bereits von Herrn Weierstrass in allgemeinsten Form ausgesprochen worden ist, und der die Ueberführung der Function $F(xy)$ in eine nothwendige Form bezweckt. An dieser „reducirten“ Form vollzieht sich dann die Spaltung in Linearfactoren ohne Weiteres, ausgenommen den Fall, dass sich die Glieder niederster Dimension zu einer Potenz vereinigen. Die quadratische Transformation, deren man sich sonst in diesem Fall zur Trennung der Wurzeln zu bedienen pflegt, reicht nicht aus, wenn es sich darum handelt, den Grad hinsichtlich einer der Variablen zu erhalten. Ich benutze eine solche

von höherer Ordnung, die eindeutig nicht umkehrbar ist. Es ist dann nur noch zu zeigen, dass der Spaltungsprocess convergente Factoren liefert.

Die Ausführung enthält das Folgende.

1.

Wenn für $x = 0, y = 0$ die ganze Function, oder, wie ich allgemein annehmen will, die gewöhnliche Potenzreihe nach x, y $F(xy)$ verschwindet, so kann man durch eine Transformation von der Form:

$$x' = x + ay$$

die Reihe F so umgestalten, dass das Aggregat der Glieder niederster (n -ter) Dimension für $x = 0$ sich auf y^n reducirt. Multiplicirt man dann F mit einer Reihe von der Form:

$$\alpha = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots,$$

wo die Indices die Dimension des betreffenden Gliedes in x, y angeben, so lässt sich bei passender Bestimmung der Coefficienten der α_i das Product in die Form einer Reihe f bringen:

$$\alpha F = f = f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + \dots,$$

welche y in nicht höherer als der n -ten Potenz enthält. Vergleicht man links und rechts die Glieder gleichhoher Dimension, so erhält man gleichzeitig die Coefficienten der Polynome α_i und der $f_{n-1}^{(n)}$ in eindeutiger Weise. Ich übergehe hier das Nähere dieses Verfahrens sowie auch den leicht zu erbringenden Nachweis, dass es eine innerhalb gewisser Grenzen in der Umgebung von $x = 0, y = 0$ convergente Reihe f liefert, nachdem dies in anderer Weise von Herrn Weierstrass (Functionentheorie, 1886, S. 107) und in weiterer Ausführung für den Fall von zwei Veränderlichen von Herrn Stickelberger (Math. Annalen Bd. 30) gezeigt worden ist.

Ordnet man f nach Potenzen von y , so kommt, weil y nur einmal, nämlich in dem Term niederster Dimension auftritt,

$$f = f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + \dots \\ y^n + y^{n-1} x \mathfrak{P}'(x) + y^{n-2} x^2 \mathfrak{P}''(x) + \dots + x^n \mathfrak{P}^{(n)}(x),$$

wo die \mathfrak{P} gewöhnliche Potenzreihen von x sind.

Wie sich nun eine ganze Zahl dadurch in Primfactoren zerlegen lässt, dass man sie zunächst in das Product von zwei kleineren verwandelt, dann mit diesen so fortfährt, bis man zuletzt bloss Primzahlpotenzen erhält, so kann man die hinsichtlich y ganze Function f zunächst in zwei Entwicklungen zu zerlegen verlangen, die in y von niederem Grade sind als f und wiederum in „reducirter“ Form erscheinen, und mit diesen so fortfahren.

Diese Aufgabe lässt immer und nur eine Lösung zu, wenn die Anfangsglieder φ_p und ψ_q der neuen Entwicklungen:

$$f = \varphi \psi \quad (\varphi_p + x^2 \varphi_{p-1} + x^3 \varphi'_{p-1} + \dots) \\ (\psi_q + x^2 \psi_{q-1} + x^3 \psi'_{q-1} + \dots),$$

wo

$$f_n = \varphi_p \psi_q$$

also

$$p + q = r$$

ist: 1) durch irgend welche vorgängige Spaltung des homogenen Ausdrucks f_n ermittelt sind und 2) keinen Factor gemeinsam haben.

Vergleicht man nämlich beiderseits die Glieder gleichhoher Dimension, so kommt

$$f_n = \varphi_p \psi_q \\ f_{n-1} = \varphi_p \psi'_{q-1} + \psi_q \varphi_{p-1} \\ f'_{n-1} = x \varphi_{p-1} \psi_{q-1} + \varphi_p \psi'_{q-1} + \psi_q \varphi'_{p-1} \\ f''_{n-1} = x (\varphi_{p-1} \psi'_{q-1} + \psi_{q-1} \varphi'_{p-1}) + \varphi_p \psi''_{q-1} + \psi_q \varphi''_{p-1} \\ \dots \dots \dots$$

Aus diesen identischen Gleichungen lassen sich aber, nach einem bekannten Satze der Algebra, die hinsichtlich

x, y ganzen homogenen Functionen $\varphi_{p-1}, \psi_{q-1}; \varphi'_{p-1}, \psi'_{q-1}; \dots$ paarweise der Reihe nach eindeutig bestimmen, wenn man die aus den vorhergehenden berechneten jedesmal in die folgenden Gleichungen einführt. Nur wenn φ_p und ψ_q einen Theiler gemeinsam haben, also insbesondere wenn f_n die n -te Potenz eines Linearfactors ist, versagt das Verfahren. Hat aber f_n ungleiche Linearfactoren, so kann man die Zerlegung von f soweit fortsetzen, bis die Einzelreihen mit Potenzen von Linearfactoren beginnen, und bei bloss ungleichen Factoren von f_n wird durch wiederholte Spaltung f in lauter Linearfactoren (hinsichtlich y) von der Form zerlegt:

$$y + a_0 x + a'_0 x^2 + a''_0 x^3 + \dots,$$

wo die a_0 Constante sind.

Für diese zunächst formale Operation ist später der Nachweis der Convergenz zu erbringen.

2.

Vorher möge der Fall untersucht werden, dass f_n einen p -fachen Factor ($p > 1$):

$$\varphi_p = (y + ax)^p$$

besitzt. Die zugehörige Entwicklung, von den anderen abgetrennt, sei von der Form:

$$\varphi = (y + ax)^p + x^2 \Phi_{p-1} + x^3 \Phi'_{p-1} + \dots$$

Setzt man

$$y + ax = y_1, \quad x = x_1,$$

so gewinnt φ die Gestalt:

$$\varphi = y_1^p + x_1^2 \varphi_{p-1} + x_1^3 \varphi'_{p-1} + \dots$$

Man ordne jetzt die Glieder nach ihrem Grad in x_1 und schreibe der Reihe nach diejenigen an, deren Coefficienten von Null verschieden sind

$$y_1^p; x_1^\alpha y_1^{p-\beta}; x_1^\gamma y_1^{p-\delta}; x_1^\epsilon y_1^{p-\zeta}; \dots$$

wo $\alpha - \beta > 0; \gamma - \delta > 0; \varepsilon - \zeta > 0; \dots$

ist und $\alpha < \gamma < \varepsilon < \dots$

ebenso wie $\beta, \delta, \zeta, \dots$ ganze positive (von Null verschiedene) Zahlen sind. Nun bilde man die (unächten) Brüche:

$$\frac{\alpha}{\beta}; \frac{\gamma}{\delta}; \frac{\varepsilon}{\zeta}; \dots,$$

und nehme den dem Werth nach kleinsten. Dies erfordert jedenfalls die Aufstellung nur einer endlichen Zahl von Quotienten, weil ihr Werth mit wachsender Dimensionszahl n zunimmt, indem der Zähler wächst, während der Nenner die Grösse p nicht überschreitet.¹⁾

Sei dieser Quotient, auf die einfachste Form gebracht, gleich ι/x , seien also ι und x theilerfremd und

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\iota}{x}; \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\iota}{x}; \frac{\varepsilon}{\zeta} > \frac{\iota}{x}; \dots$$

Führt man dann in die vorliegende Reihe neue Variablen ein mittelst der Formeln

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2 x_2^{\iota-1}}{x_2^x},$$

so wird das Glied

$$y_1^p = y_2^p x_2^{p(\iota-1)}$$

hinsichtlich x_2, y_2 von der Dimension $p\iota$, während die Dimension irgend eines anderen Gliedes

$$y_1^{p-v} x_1^\mu$$

gleich

$$(p-v)\iota + v\mu = p\iota + vx \left(\frac{\mu}{v} - \frac{\iota}{x} \right),$$

also höher als $p\iota$ wird, ausser für diejenigen Glieder, für welche, wie für das den Zahlen ι, x entsprechende, jener

1) Man hat höchstens bis zu demjenigen Grad in x_1 fortzuschreiten, der durch die in dem Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ enthaltene ganze Zahl sich ausdrückt.

Quotient den Werth ι/x besitzt, wo dann die Dimension ebenfalls gleich $p\iota$ wird. Es existirt also in der transformirten Reihe mindestens noch ein Glied von der Dimension des Anfangsgliedes, während keines von niedrigerer Dimension ist. Aus diesen zweien lässt sich ein Linearfactor von der Form:

$$y_2 + b x_2$$

mit von Null verschiedenem Coefficienten b oder doch eine Potenz eines solchen ausscheiden, was nun, nach Massgabe von § 1, wieder zur Spaltung der Reihe φ verwendet werden kann. Denn die Glieder $(p+1)$ -ter und höherer Dimension enthalten y_2 höchstens in der $(p-1)$ -ten Ordnung; nach Ausscheidung der $p(\iota-1)$ -ten Potenz von x_2 besitzt also φ in x_2, y_2 die in § 1 zu Grunde gelegte reducirte Form:

$$\varphi = x_2^{p\iota-1} (\psi_p + x_2^2 \psi_{p-1} + x_2^3 \psi'_{p-1} + \dots).$$

Befindet sich unter den Linearfactoren von ψ_p einer, der nur einmal vorkommt:

$$y_2 + b x_2,$$

so lässt sich nach jenem Verfahren aus ψ der Factor absondern

$$y_2 + b x_2 + b' x_2^2 + \dots,$$

welcher, nach Vereinigung mit dem Factor $x_2^{\iota-1}$ durch Rücksubstitution von x und y die Gestalt annimmt

$$y_1 + b x_1^{\frac{\iota}{\kappa}} + b' x_1^{\frac{\iota+1}{\kappa}} + \dots = y + ax + bx^{\frac{\iota}{\kappa}} + b' x^{\frac{\iota+1}{\kappa}} + \dots,$$

was einer Entwicklung von y nach gebrochenen Potenzen von x entspricht.

Hat ψ_p dagegen $y_2 + b x_2$ zum q -fachen Factor ($q < p$), so schlage man den gezeigten Weg zur Zerlegung der entsprechenden Entwicklung:

$$\chi = (y_2 + b x_2)^q + \chi_{q+1} + \dots$$

von neuem ein.

Erhält man an Stelle der früheren Zahlen ι , κ jetzt etwa die Zahlen λ , μ , und scheidet sich aus den Gliedern niederster Dimension der neuen Reihe, die man durch die Substitution:

$$y_3 + bx_3 = y_3 x_3^{\lambda-1} \\ x_2 = x_3^\mu$$

erhält, etwa der Linearfactor $y_3 + cx_3$ aus, so bekommt man, wenn dieser nur einmal auftritt, eine Entwicklung von der Form:

$$y_3 + cx_3 + c'x_3^2 + c''x_3^3 + \dots,$$

die durch rückwärts einführen der alten Variabeln in:

$$y_3 + bx_3 + cx_2^{\frac{\lambda}{\mu}} + c'x_2^{\frac{\lambda+1}{\mu}} + \dots$$

und weiterhin in:

$$y + ax + bx^\kappa + cx^{\frac{\lambda+\mu(\iota-1)}{\kappa\mu}} + c'x^{\frac{\lambda+\mu(\iota-1)+1}{\kappa\mu}} + \dots$$

übergeht.¹⁾

Tritt dagegen der Factor $y_3 + cx_3$ mehrfach auf, so hat man wiederum zunächst eine Substitution vorzunehmen u. s. w. Da die Ordnung des ersten Gliedes hinsichtlich y bei jeder neuen Abscheidung, die möglich wird, sich erniedrigt, so hat das angegebene Verfahren im Allgemeinen ein Ende.

1) Aus den Zahlen, vermöge deren oben die Exponenten der successiven Transformation gebildet wurden,

$$\frac{\iota}{\kappa}, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\nu}{\varrho}, \dots$$

entstehen diejenigen Exponenten der Reihe in x , die H. J. S. Smith „kritische“, Halphen „charakteristische“ Zahlen genannt hat. Unter den Brüchen:

$$\frac{\iota}{\kappa}, \frac{\iota}{\kappa} + \frac{\lambda-\mu}{\mu\kappa}, \frac{\iota}{\kappa} + \frac{\lambda-\mu}{\mu\kappa} + \frac{\nu-\varrho}{\varrho\mu\kappa}, \dots$$

sind es diejenigen, für welche die hinzutretenden Factoren des Nenners: $\kappa, \mu, \varrho, \dots$ von 1 verschieden sind.

Nur in dem einen Fall, dass das erste Glied der transformirten Reihe selbst die Potenz eines linearen Ausdrucks $y + kx$, von der Höhe desjenigen der vorhergehenden Reihe ist, also wenn z. B. oben die Function ψ_p wieder p gleiche Factoren besitzt, ist zunächst eine Abscheidung unmöglich. Man wiederhole dann das Verfahren so oft, bis die Factoren verschieden werden. Erhält man aber immer wieder nur p -te Potenzen, so muss man schliessen, dass die vorliegende Reihe überhaupt die p -te Potenz eines Linearfactors $y + \mathfrak{P}(x)$ ist, wo \mathfrak{P} eine gewöhnliche Potenzreihe ist.

In der That, wenn ψ_p (s. oben) eine p -te Potenz ist, wie φ_p , so muss zunächst $\kappa = 1$ sein. Denn die Rücktransformation:

$$x_2 = x_1^{\kappa}; \quad y_2 = y_1 x_1^{1-\kappa},$$

auf das Anfangsglied von φ :

$$x_2^{p(\kappa-1)} \psi_p = [(y_2 + b x_2) x_2^{\kappa-1}]^p = \sum_{\varrho} \binom{p}{\varrho} (y_2 x_2^{\kappa-1})^{p-\varrho} b^{\varrho} x_2^{\varrho}$$

($\varrho = 0, 1, \dots, p$) angewandt, liefert:

$$\sum_{\varrho} \binom{p}{\varrho} y_1^{p-\varrho} b^{\varrho} x_1^{\frac{\varrho}{\kappa}},$$

also nur dann ganzzahlige Exponenten von x_1 , wenn:

$$\kappa = 1$$

ist. — Wendet man ferner jene Rücksubstitution (mit $\kappa = 1$) auf die Glieder höherer Dimension $\psi_{p+\sigma}$ ($\sigma > 1$) an:

$$x_2^{p(\kappa-1)} \psi_{p+\sigma} = \sum_{\varrho} A_{\varrho} y_2^{p-\varrho} x_2^{\varrho+\sigma} x_2^{p(\kappa-1)}$$

($\varrho = 1, 2, \dots, p$), wo A_{ϱ} ein Coefficient ist, so kommt:

$$\sum_{\varrho} A_{\varrho} y_1^{p-\varrho} x_1^{\varrho+\sigma}.$$

Es ergeben sich also nur Glieder, die bei gleicher Ordnung in y_1 von höherer Ordnung in x_1 sind, wie die bei der Rücktransformation aus ψ_p hervorgegangenen. Dies gilt

auch noch nach Einführung von $x = x_1$, $y = y_1 - ax_1$. Weil nun für jede Wiederholung des Transformationsprocesses, sofern immer wieder eine p -te Potenz auftritt, die gleiche Bemerkung gilt, so wird die nach mehrmaliger Wiederholung erhaltene Reihe:

$$\varphi = x_1^K [(y_1 + mx_1)^p + \vartheta_{p+1} + \vartheta_{p+2} + \dots]$$

nach erfolgter Rückwärts-Einführung der Variablen x, y in die Form übergehen:

$$\varphi = (y + ax + bx' + cx^{t+1} + \dots + kx^K)^p + \Phi(x, y),$$

wo Φ höchstens von der $(p-1)$ -ten Ordnung in y und in Bezug auf x in jedem Glied von höherer Ordnung ist, wie die hinsichtlich y gleich hohen Glieder der p -ten Potenz des Linearfactors.

Weil nun, wenn man den Process unbegrenzt oft wiederholt, der Exponent K unbegrenzt wächst, so geht φ in die p -te Potenz eines Linearfactors $y + \mathfrak{P}(x)$ über, wo in \mathfrak{P} nur ganzzahlige Exponenten vorkommen, w. z. b. w.

Ist insbesondere die Ausgangsfunktion $F(xy)$ (§ 1) hinsichtlich der Veränderlichen x, y irreducibel, so können sich nicht immer nur wieder p -te Potenzen als Anfangsglieder ergeben. Denn enthielte die reducirte Form $f(xy)$ einen Factor von der Gestalt:

$$[y + \mathfrak{P}(x)]^p,$$

wo $p > 1$ ist, so würde aus der in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ identischen Gleichung

$$\alpha F = f$$

folgen, dass nicht nur F ihn besitzt, sondern auch der Differentialquotient von F nach y , was mit dem Begriff der Irreducibilität unvereinbar ist.

In allen Fällen gelangt man durch das angegebene Verfahren zu einer Zerlegung der Reihe f in Linearfactoren,

und zwar zu einer einzigen. Denn wären zwei verschiedene Zerlegungen möglich, also zugleich:

$$f = \frac{(y - \mathfrak{P})(y - \mathfrak{P}') \cdots (y - \mathfrak{P}^{(n-1)})}{(y - \Omega)(y - \Omega') \cdots (y - \Omega^{(n-1)})},$$

und die \mathfrak{P} von den Ω verschieden, so müsste, weil das eine Product für $y = \mathfrak{P}$ verschwindet, dies auch mit dem anderen der Fall sein, also etwa $\mathfrak{P} = \Omega$ sein. Dann könnte man beiderseits mit $x - \mathfrak{P}$ dividiren und die Uebereinstimmung eines weiteren Linearfactors links und rechts nachweisen u. s. w.

3.

Es erübrigt nun noch, einen Giltigkeitsbereich nachzuweisen für den in § 1 angegebenen Process der Spaltung der Reihe f in die beiden φ, ψ :

$$\begin{aligned} f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + x^4 f''_{n-1} + \cdots \\ = (\varphi_p + x^2 \varphi_{p-1} + x^3 \varphi'_{p-1} + \cdots) \\ (\psi_q + x^2 \psi_{q-1} + x^3 \psi'_{q-1} + \cdots), \end{aligned} \quad (1)$$

wo

$$\begin{aligned} f_n &= \varphi_p \psi_q \\ n &= p + q \end{aligned}$$

ist. Zu dem Zweck wird hinsichtlich der Coefficienten von f die Annahme gemacht, dass sie dem absoluten Betrage nach < 1 sind, ein Verhalten, das sich, sofern f überhaupt in der Umgebung von $x = 0, y = 0$ convergirt, durch eine Transformation von der Form $x = \rho x'$ und Division der Identität $f = \varphi \psi$ mit einer passend gewählten Constanten immer herstellen lässt.

Man bemerke zunächst, dass die aus der Identität (1) fließenden Einzelgleichungen nach § 1 alle von der Form sind:

$$\varphi_{p-1} \varphi_p + \varphi_{p-1} \psi_q = F_{n-1} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{wo } F_{n-1} &= A^{(0)} y^{n-1} + \binom{n-1}{1} A^{(1)} y^{n-2} x + \binom{n-1}{2} A^{(2)} y^{n-3} x^2 \\ &+ \cdots + A^{(n-1)} x^{n-1} \end{aligned}$$

eine bekannte, φ_p, ψ_q ebensolche theilerfremde, Φ_{p-1}, Ψ_{q-1} gesuchte, in x, y homogene Functionen sind. Die Coefficienten der letzteren bestimmen sich aus den $n = p + q$ linearen Gleichungen, die man durch Gleichsetzen der Coefficienten von $y^{n-1}, y^{n-2}x, \dots, x^{n-1}$ links und rechts erhält, und zwar enthalten die Ausdrücke die Coefficienten $A^{(i)}$ von F linear und homogen. Irgend ein Coefficient $\alpha^{(k)}$ von Φ_{p-1}, Ψ_{q-1} stellt sich also durch eine Summe dar von der Form:

$$\alpha^{(k)} = \sum A^{(i)} R^{(ik)},$$

wo die $R^{(ik)}$ nur noch von den Coefficienten von φ_p, ψ_q abhängen. Ist nun unter allen Ausdrücken $R^{(ik)}$ der dem absoluten Betrag nach grösste absolut genommen $= \frac{\varrho}{n}$, so genügt jeder Coefficient $\alpha^{(k)}$ von Φ_{p-1}, Ψ_{q-1} der Ungleichung: =

$$|\alpha^{(k)}| < \varrho A, \quad (2a)$$

wenn A der grösste unter den Coefficienten $|A^{(i)}|$ von F ist. Nun lautet die erste der aus (1) folgenden Identitäten:

$$\varphi_p \psi_{q-1} + \psi_q \varphi_{p-1} = f_{n-1},$$

wo φ_p, ψ_q gegeben sind. Die absoluten Beträge der Coefficienten von $\varphi_{p-1}, \psi_{q-1}$ vergrössern sich, wenn man hier statt der Coefficienten von f_{n-1} die zu grossen Werthe 1 einsetzt, also statt f_{n-1} die Function:

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}$$

oder statt ihrer:

$$(x + y)^{n-1}$$

einträgt. Nach 2a erhält man so für den dem absoluten Betrag nach grössten Coefficienten α von φ_{p-1} und ψ_{q-1} die Ungleichung:

$$|\alpha| < \varrho,$$

wo ϱ dieselbe Bedeutung wie oben hat.

Die anderen Identitäten sind sämtlich von der Form:

$$\begin{aligned} \psi_{q-1}^{(k)} \varphi_p + \varphi_{p-1}^{(k)} \psi_q - f_{n-1}^{(k)} - x(\psi_{q-1}^{(k-1)} \varphi_{p-1} + \varphi_{p-1}^{(k-1)} \psi_{q-1} \\ + \psi_{q-1}^{(k-2)} \varphi_{p-1}' + \varphi_{p-1}^{(k-2)} \psi_{q-1}' + \dots) = F_{n-1}^{(k)} \quad (3) \end{aligned}$$

Es erhöht sich wiederum der absolute Betrag der Coefficienten in F , wenn man:

1. Statt der Coefficienten der Einzelfactoren ihre absoluten Beträge einsetzt,
2. Die Coefficienten in $f_{n-1}^{(k)}$ allenthalben gleich 1 macht.
3. Für diejenigen von φ, ψ ; bezw. $\varphi', \psi'; \dots \varphi^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}$ gewisse sogleich zu bestimmende zu grosse Beträge α bezw. $\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(k-1)}$ einträgt.

Tritt auf diese Weise an Stelle von $F_{n-1}^{(k)}$ die Function:

$$\begin{aligned} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots x^{n-1}) + x(y^{p-1} + \dots + x^{p-1}) \\ (y^{q-1} + \dots + x^{q-1})(2\alpha^{(k-1)}\alpha + 2\alpha^{(k-2)}\alpha' + \dots) \end{aligned}$$

oder gar:

$$(y + x)^{n-1}(1 + 2\alpha^{(k-1)}\alpha + 2\alpha^{(k-2)}\alpha' + \dots),$$

so folgt um so mehr — wegen (2a) — für die Coefficienten $\alpha^{(k)}$ von $\varphi_{p-1}^{(k)}, \psi_{q-1}^{(k)}$:

$$\alpha^{(k)} < \varrho(1 + 2\alpha^{(k-1)}\alpha + 2\alpha^{(k-2)}\alpha' + \dots) \quad (4)$$

Die anstatt der Coefficienten von $\varphi, \psi; \varphi', \psi'; \dots$ eingeführten Beträge $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(k-1)}$ wollen wir, weil dies in der That eine Vergrösserung bedeutet, folgeweise den Gleichungen entnehmen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varrho \\ \alpha' &= \varrho(1 + \alpha\alpha) \\ \alpha'' &= \varrho(1 + 2\alpha\alpha') \\ \alpha''' &= \varrho(1 + 2\alpha''\alpha + \alpha'\alpha') \\ &\dots \end{aligned} \quad (4a)$$

welche aus der Relation (4) hervorgehen, wenn man das Zeichen $<$ durch $=$ ersetzt.

Aber dieselben Gleichungen ergeben sich aus dem speciellen Problem: Die in der Umgebung von $\xi = 0$, $\eta = 0$ durch folgende Reihe definirte Function:

$$f = \eta^2 - \frac{\xi^2}{4\varrho^2} + \xi^3 + \xi^4 + \dots = \eta^2 - \frac{\xi^2}{4\varrho^2} + \frac{\xi^3}{1-\xi}$$

in ihre Linearfactoren zu zerlegen

$$f = \left(\eta - \frac{\xi}{2\varrho} + \alpha \xi^2 + \alpha' \xi^3 + \alpha'' \xi^4 + \dots \right) \left(\eta + \frac{\xi}{2\varrho} - \alpha \xi^2 - \alpha' \xi^3 - \alpha'' \xi^4 - \dots \right). \quad (5)$$

In der That gehen für diese Identität die allgemeinen Gleichungen (3) genau in diejenigen (4a) über. Andererseits berechnen sich die $\alpha^{(i)}$ in (5) mittelst der Binomialformel aus:

$$\eta = \frac{\xi}{2\varrho} \left(1 - \frac{4\varrho^2\xi}{1-\xi} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\xi}{2\varrho} (1 - 2\varrho^2\xi - 2\varrho^2(1+\varrho^2)\xi^2 - \dots)$$

und weil aus der Convergenzbedingung: $\frac{4\varrho^2\xi}{1-\xi} < 1$

sich die obere Grenze ableitet: $|\xi| < \frac{1}{4\varrho^2 + 1}$,

so folgt, dass auch die Reihen der $\varphi_{p-1}^{(k)}$, $\psi_{q-1}^{(k)}$ convergiren, wenn der absolute Betrag der Veränderlichen x die Grenze nicht übersteigt:

$$|x| < \frac{1}{4\varrho^2 + 1}.$$

Hiermit ist ein Convergenzbereich für die Reihen φ , ψ und also ein Giltigkeitsbereich für die Identität:

$$f = \varphi \psi$$

nachgewiesen.

Ein solcher existirt demnach auch für die ganze Zerlegung, weil dieselbe nur in der wiederholten Anwendung des Spaltungsprocesses besteht.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1891.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Verkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangs-
 stätigung zu betrachten. — Die zunächst für die philos.-philol. u. histor. Classe be-
 stimmten Druckschriften sind in deren Sitzungsberichten 1891 Heft III verzeichnet.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Observatory Adelaide, South Australia:

Meteorological Observations. Year 1888 and 1888. 1889/90. Fol.

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XIII. part. 2. 1890. 8^o.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Pro Pilar, Geografjeske Koordinate. 1890. Fol.

Dr. Janeček, Obća teoret. i fizik. lučba. I. 1890. 8^o.

New-York State Museum in Albany:

Annals. Vol. I. Nr. 1. 1889. 4^o.

Royal Dutch Meteorological Institute in Amsterdam:

Attempt to compare the instruments for absolute magnetic
 measurements by Van Rijkevorsel. Utrecht 1890. 4^o.

Société d'études scientifiques in Angers:

Bulletin. Nouv. Série. Année XIX. 1889. 1890. 8^o.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

Bericht. 1890. 8^o.

Johns Hopkins University in Baltimore:

American chemical Journal. Vol. 12 Nr. 6—8. Vol. 13 Nr. 1. 1890—91. 8°.

Studies from the biological Laboratory. Vol. IV. Nr. 6. 1890. 8°.
American Journal of Mathematics. Vol. XIII. Nr. 1. 2. 1890. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. IX. Heft 1. 1890. 8°.

Magnetical and Meteorological Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XII. 1889. 1890. Fol.
Regenwaarnemingen. XI. Jahrg. 1889. 1890. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke. Bd. V. VI. 1890/91. 4°.

Centralbureau für internationale Erdmessung in Berlin:

Verhandlungen der 1890 zu Freiburg im Br. abgehaltenen Confere~~n~~
der permanenten Commission der Internationalen Erdmessun~~g~~
1891. 4°.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 23. Jahrg. Nr. 18. 19. 24. Jahrg. Nr. 1—11. 1890/91. 8°

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 42. Heft 3. 4. 1890/91. 8°.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Bd. XXI. 1891. 8°.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1884. Jahrg. 40. Abth. 1—3.
1890. 8°.
Verhandlungen. 9. Jahrg. 1891. 8°.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. IV. Nr. 20—26. Bd. V. Nr. 1—5
1890/91. 8°.
Verhandlungen. 1890—91. Nr. 1—5. 8°.

K. Technische Hochschule in Berlin:

Deutschlands Leistungen und Aussichten auf technischem Gebie^t
von F. Reuleaux. (Festrede.) 1891. gr. 8°.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Die Schwerkraft im Hochgebirge, von F. R. Helmert. 1890. 4°.
Das Berliner Basisnetz. 1891. 4°.

K. Preussisches meteorologisches Institut in Berlin:

Abhandlungen. Bd. I. Nr. 1 3. 1890. 4^o.

K. preuss. meteorol. Institut von W. v. Bezold. 1890. 8^o.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XX. Jahrg. 1888. Heft 1. 2. 1890. 8^o.

K. geologische Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 3. Die Foraminiferen der Aachener Kreide, von Ignaz Beissel. Text und Atlas. 1891. 4^o.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1890. 8^o.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. 1891. Nr. 3—26. 4^o.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. XI. Jahrg. 1891. Heft 1—6. gr. 8^o.

Gewerbeschule zu Bistritz:

I. Jahresbericht f. d. J. 1889/90. 8^o.

Naturhist. Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Abhandlungen. Jahrg. 47. 2. Hälfte. 1890. 8^o.

Société de Géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1891. Nr. 9—12. 8^o.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. XXV. 1890. 8^o.

Boston Society of natural history in Boston:

Proceedings. Vol. XXIV. part 3. 4. 1890. 8^o.

Memoirs. Vol. IV. Nr. 7—9. 1890. 4^o.

Meteorologische Station in Bremen:

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen in Bremen von 1803—1890.
Jahrg. I. 1891. 4^o.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XII. Heft 1. 1891. 8^o.

Naturforschender Verein in Brünn:

Abhandlungen. Bd. 28. 1889. 1890. 8^o.

II. Bericht der meteorologischen Commission. 1890. 8^o.

Journal of Zoology

Journal of Zoology

— *Journal* Nr. 1—4. 1890/91. 8

Journal of Zoology

Journal of Zoology Nr. 1—XXXVII

Journal of Zoology in Budapest

Journal of Zoology in Budapest

Journal of Zoology in Budapest

Journal of Zoology in Budapest Nr. 1—XII. Heft 9. Bd. IX. II

Journal of Zoology in Budapest Nr. 1—12. Bd. XXI. Heft 1

Journal of Zoology in Budapest Nr. 1—5. 1890/91. 8

Journal of Zoology in Budapest

Journal of Zoology in Budapest Nr. 1, 2. Vol. V. fasc. 1. 1

Journal of Zoology in Budapest

Journal of Zoology in Budapest 11th year. 1890. 1

Journal of Zoology in Budapest Meteorological Department
1888—89. 1890. Fol.

Journal of Zoology in Budapest The Bay of Bengal by J. E.

Journal of Zoology in Calcutta

Journal of Zoology in Calcutta Mission. Coleoptera. 1890.

Journal of Zoology in Calcutta

Journal of Zoology in Calcutta Wood-Mason. Nr. 2. 1891.

Journal of Zoology in Calcutta

Journal of Zoology in Calcutta Mountain-Districts. Jan. to

Geological Survey of India in Calcutta:

XXIII. part 4. 1890. 4^o.

XXIV. part 2. 1890. 4^o.

Indica. Ser. XIII. Vol. IV. part 1. 1889. Fol.

Philosophical Society in Cambridge:

Vol. VII. part 3. 1891. 8^o.

Vol. XV. part 1. 1891. 4^o.

Maxwell Memorial Committee in Cambridge:

Papers of James Clerk Maxwell. Vol. 1. 2. 1890. 4^o.

Comparative Zoölogy at Harvard College in Cambridge, M.:

Report for 1889—90. 8^o.

XX. Nr. 4—8. Vol. XXI. No. 1. 1890/91. 8^o.

Harvard College Observatory in Cambridge, Mass.:

The Astronomical Observatory. Vol. XXIII. part 1.

XXIV. Vol. XXVII. 1890. 4^o.

Harvard College Observatory 1840—1890. 1890. 8^o.

Report. 1890. 8^o.

On the Periodic, Variable Stars of long period. 1891. 4^o.

Accademia Gioenia in Catania:

Annuario. Nuova Ser. Fasc. XV—XIX. November 1890 bis 1891. 8^o.

Vol. 2. 1890. 4^o.

Sächsisches meteorol. Institut in Chemnitz:

Meteorologisches Jahrbuch. I. Hälfte. Abth. 1 und 2. 4^o.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Ann. XXVI. Paris 1889. 8^o.

Committee of the Norwegian North-Atlantic Expedition in Christiania:

Nordhavs-Expedition 1876—1878. Nr. XX. 1891. Fol.

K. Norwegische Universität in Christiania:

Meteorol. Instituts für 1888. 1890. 4^o.

Mathematik. Bd. XIII, 2—4. Bd. XIV, 1. 2. 1890. 8^o.

for Naturvidenskaberne. Bd. XXXI. Nr. 4. 1890. 8^o.

Herbarium, Viridarium Norvegicum. Bd. III. 1889. 4^o.

Observatory in Cincinnati:

Nr. 11. Charts and micrometrical measures of nebulae
by J. Porter. 1891. 4^o.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung. 1890 Nr. 100—105. 1891 Nr. 1—46. 1890/91. 4°.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tom. VI. livr. 2. Leiden 1890. 4°.

Meteorologisches Observatorium in Dorpat:

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen für das Jahr 1888. 1891. 4°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XI. Janv.—Juin 1890. 8°.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. III. 1891. 8°.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VI. part 2. 1890. 8°.

R. Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1889—1890. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

75. Jahresbericht pro 1889/90. 1891. 8°.

R. Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. 4. Serie. Vol. XIII. disp. 3. Vol. XIV. disp. 1. 1890/91. 8°.

Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. XVI. Heft 2. 1890. 4°.

Katalog der Vogelsammlung im Museum der Gesellschaft, von Ernst Hartert. 1891. 8°.

Koninklijke Genootschap Diodora in Gent:

Botanisch Jaarboek. 3. Jaargang 1891. 8°.

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Serie II. Vol. 7—9. 1889—90. 8°.

Physiologische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Gießen:

27. Bericht. 1890. 8°.

Geological Society in Glasgow:

Transactions. Vol. IX. part 1. 1891. 8°.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:
Bulletin. Vol. V. 1890. 8^o.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:
Mittheilungen. Jahrg. XXII. 1891. 8^o.

1. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië in Haag:

Badoej's door Jul. Jacobs en J. J. Meijer. 1891. 8^o.

Moldino-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:
Moldina. Heft XXVI. Nr. 21—24. XXVII. 1—8. 1890/91. 4^o.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

Verzeichniss der Bibliothek der deutschen Seewarte. 1890. 8^o.

Musée Teyler in Harlem:

Archives. Ser. II. Vol. II. partie 5. 1890. 4^o.

Société Hollandaise des sciences in Harlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Tom. XXIV. 4. 5. XXV.
Nr. 1. 1891. 8^o.

Œuvres complètes de Christiaan Huygens. Tom. III. La Haye
1890. 4^o.

Naturhistorisch-medizinischer Verein in Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Bd. IV. Heft 4. 1891. 8^o.

Landesbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mittheilungen. 40. Jahrgang. 1890. 8^o.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 25. Heft 1 und 2.
1890. 8^o.

Section médicale de la Société des Sciences in Kharkow:

Année. Jahrg. 1890. 1891. 8^o.

Wissenschaftl.-Kommission zur Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Vericht für die Jahre 1887—1889. XVII. bis XIX. Jahrg. II. Heft.
1890. Fol.

Ergebnisse der Beobachtungs-Stationen. Jahrg. 1890. Heft X—XII.
1891. qu. 4^o.

Verzeichniss deutscher Meeresalgen. Heft II. Lief. 1 u. 2. 1891. 2^o.

Naturwissenschaftl. Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:

Verhandlungen. Bd. VIII. Heft 2. 1891. 8^o.

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

1891

R. Microscopical Society in London:

Vol. 1891. Part 1—3. 8°.

Zoological Society in London:

Transactions. 1890. part IV. 1891. part I. 8°.

Proceedings. Vol. XIII. part 1. 2. 1891. 4°.

Zeitschrift Nature in London:

Vol. 43 Nr. 1105—1122. Vol. 44 Nr. 1123—1125. 1891. 4°.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. XVI, 2. XVII, 4. 1890. 8°.

Washburn Observatory in Madison:

Observations. Vol. VII. part 1. 1890. 4°.

Scientific Association in Meriden, Conn.:

Transactions. Vol. 4. 1889—90. 1891. 8°.

Observatorio astronómico nacional de Tacubaya in Mexico:

Boletín. Anno XI. 1891. 1890. 8°.

Memorias. Tom. I. Nr. 2. 1891. 4°.

Observatorio meteorológico-magnético de México in Mexico:

Boletín mensual. Resumen meteorológico del año de 1889. 1890. 4°.

Temperaturas psicrométricas calculadas para la altura de México, por José Zendejas. 1889. 8°.

Sociedad de geografía y estadística de la república Mexicana in Mexico:

Boletín. Tom. II. Nr. 1. 2. 1890. 8°.

Sociedad de historia natural in Mexico:

Estudios de naturaleza. II. Serie. Tom. I. Nr. 9. 1890. Fol.

Deutscher wissenschaftlicher Verein in Mexico:

Abhandlungen. Bd. I. Heft 2. 3. 1890. Fol.

Società dei Naturalisti in Modena:

Serie III. Vol. IX. Fasc. 2. 1890. 8°.

Geological Survey in Montreal:

Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. III. Nr. I. 1891. 4°.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. 1890. Nr. 3. 4. 1891. 8^o.

Meteorologische Beobachtungen. 1890. I. u. II. Hälfte. 1891.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie etc. in Berlin und

Correspondenzblatt. XXI. Jahrg. 1890. Nr. 10—12. XXII.
1891. Nr. 1. München. 4^o.

Gedächtnissfeier für Heinrich Schliemann. 1891. 8^o.

*K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schul-
heiten in München:*

Die Deutschen Expeditionen und ihre Ergebnisse. Bd. I. G
licher Theil, herausgeg. von G. Neumayer. Berlin :

Die k. Observatorien für Astrophysik, Meteorologie und Geo
Potsdam. Berlin 1890. 4^o.

Société des Sciences in Nancy:

Bulletin. Ser. II. tom. 10, fasc. 23. Paris 1890. 8^o.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neap

Rendiconto. Ser. II. Vol. IV. Fasc. 1—12. 1890. 4^o.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. IX. Heft 4. Berlin 1891. 8^o.

North of England Institute of Engineers in Newcastle-upon

Report of the French Commission on the use of explosives.
1891. 8^o.

Transactions. Vol. 39. part I. II. Vol. 40. part 1. 1891. 8

Connecticut Academy of arts et sciences in New-Have

Transactions. Vol. VIII. part 1. 1890. 8^o.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. Nr. 239—244. Nov. 1890—Apr. 1891. 8^o.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. IV. Index. Vol. V. Nr. 4—8. 1890. 8^o.

Transactions. Vol. IX. Nr. 3—8. 1889—90. 8^o.

*The Journal of comparative medecine and veterinary ar
in New-York:*

Journal. Vol. XII. Nr. 1—5. 1891. 8^o.

American Museum of natural history in New-York

Bulletin. Nr. 7. 8. Vol. II. Nr. 9. 10. Vol. III. Nr. 1. Alt
—1890. gr. 8^o.

American Chemical Society in New-York:

Journal. Vol. XII. Nr. 10. XIII. 1—4. 1890. 8^o.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XXII. Nr. 4 and Supplement. XXIII. Nr. 1. 1890/91. 8^o.

Neurussische Naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XV. Heft 1. 2 und Mathem. Abtheilung. Tom. XI. 1890. 8^o.

Naturwissenschaftlicher Verein in Osnabrück:

8. Jahresbericht für die Jahre 1889 und 1890. 1891. 8^o.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Vol. VII. Fasc. 1. 1891. 8^o.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. V. Fasc. 1—3. 1891. 8^o.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Anno XIII. 1890. Maggio—Dicembre. 1890/91. 4^o.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1890. Nr. 52. 1891. Nr. 1—25. 8^o.

Académie des Sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 111 Nr. 26. Tom. 112 Nr. 1—25. 1890/91. 4^o.
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. II. Ser. tom. IX. 1891. 4^o.

Comité International des Poids et Mesures in Paris:

Procès-verbaux des séances de 1889. 1890. 8^o.
XIII^e Rapport sur l'année 1889. 1890. 4^o.
Comptes rendus des séances de la première conférence générale en 1889. 1890. 4^o.
Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures. Tom. VII. 1890. 4^o.

Laboratoire de Géologie à la Sorbonne in Paris:

Edmond Hébert. 1891. 8^o.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur scientifique. Livr. 589—595. Janvier—Juillet 1891. gr. 8^o.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Nouvelles Archives. II. Série. tom. VII. Fasc. 1. III. Série. tom. II. Fasc. 1. 1884—1890. Fol.

*Société d'anthropologie in Paris:*Mémoires. 2^e Sér. tom. IV. Fasc. 2. 1890. 8^o.Bulletins. III. Série. tom. XII. Fasc. 4. IV. Série. tom. I. Fasc. 1890. 8^o.*Société botanique de France in Paris:*Bulletin. Tom. 38. Comptes rendus des séances. Nr. 1. 1891. 8^o.*Société de géographie in Paris:*Bulletin. VII. Ser. tom. XI. trimestre 3. 4. tom. XII. trim. 1. —91. 8^o.Compte rendu 1890 Nr. 16. 17. 1891 Nr. 1—13. 8^o.*Société mathématique de France in Paris:*Bulletin. Tom. XVIII. Nr. 5. 6. XIX. Nr. 1—5. 1890/91. 8^o.*Société zoologique de France in Paris:*Mémoires. Tom. III. partie 4 et 5. Tom. IV. partie 1 et 2. Fe 26 à 35. 1890/91. 8^o.

Bulletin. Tom. XV. Nr. 7—10. Tom. XVI. Nr. 1—5. 1890/91.

*Zeitschrift L'Électricien in Paris:*L'Électricien. II. Ser. tom. I. Nr. 1—26. 1891. gr. 8^o.*Accademia medico-chirurgica in Perugia:*Atti e rendiconti. Vol. II. Fasc. 4. 1890. 8^o.*Comité géologique in St. Petersburg:*Mémoires. Vol. IV. Nr. 2. Vol. V. Nr. 1 und 5. Vol. VIII. Nr. 1. Vol. X. Nr. 1. 1890. 4^o.Bulletins. Tom. IX. Nr. 7. 8. 1890. 8^o.*Chemisch-physikalische Gesellschaft an der k. Universität in St. Petersburg:*Schurnal. Tom. XXII. Nr. 9. XXIII. Heft 1—4. 1890/91. 8^o.*Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:*Annalen. Jahrg. 1889. Theil II. 1890. 4^o.*Academy of natural sciences in Philadelphia:*Proceedings. 1890. part II. III. 1890. 8^o.*American pharmaceutical Association in Philadelphia:*Proceedings. 38th annual meeting held ad Old Point Comfort. September 1890. 8^o.*American philosophical Society in Philadelphia:*Proceedings. Vol. 28. Nr. 134. 1890. 8^o.

Geological Survey of Pennsylvania in Philadelphia:

ary of Fossils. Vol. 2. 3. Harrisburg 1889—90. 8^o.
Southern Anthracite Field. Part III.
port on the Oil and Gas Fields. Harrisburg 1890. 8^o.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

lemorie. Vol. XI. 1891. 8^o.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

. Bd. XX. Heft 1—4. 1890/91. 8^o.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

ssberichte. Mathem.-physik. Classe 1890, I u. II. 8^o.

Sternwarte in Pulkowa:

ment III. aux observations de Poulkova. St. Petersburg.
1891. Fol.
phemeriden auf d. Jahr 1891 von W. Doeller. St. P. 1890. 8^o.
des Directors der Nicolai-Hauptsternwarte 1887—1889.
St. P. 1890. 8^o.

Observatorio in Rio de Janeiro:

a. Anno V. Nr. 12. Anno VI. Nr. 1—4. 1890/91. 8^o.

Academy of Science in Rochester U. St.:

dings. Brochure I. 1890. 8^o.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Anno 43. Sessione 4—6. 1890. 4^o.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

ino 1890. Nr. 11. 12. 8^o.

*Staatsch Genootschap der proefonder-vindelijke Wijsbegerte
in Rotterdam:*

e Verhandelingen. II. Reeks, 3. Deel, 3. Stuk. 1890. 4^o.

California Academy of Sciences in San Francisco:

onal Papers. I. III. 1890. 8^o.

Naturwissenschaftlicher Verein in St. Gallen:

st während des Vereinsjahres 1888/89. 1890. 8^o.

R. Accademia dei Fisiocritici in Siena:

Serie IV. Vol. 3. Fasc. 1—4. 1890/91. 8^o.

Société des Sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. XXIV. Fasc. 10. Tom. XXV. Fasc. 1-4.
1890/91. 8°.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. XXIII. part 2. Vol. XXIV. part 1.
1889/90. 8°.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1889. 1890. 8°.
Magnetische Beobachtungen im Jahre 1888-89. 1890. 8°.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo
Mittheilungen. 45. Heft. Yokohama 1891. Fol.

Medicinische Fakultät der kaiserl. japanischen Universität in Tokyo
Mittheilungen. Bd. I. Nr. 4. 1890. 4°.

College of science, Imp. University of Japan in Tokyo:

Journal. Vol. IV. part 1. 1891. 4°.

Kansas-Academy of Science in Topeka:

Transactions. Vol. XII. part 1. 1890. 8°.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. I. part 1. 2. 1890. 8°.
4th annual Report. 1891. 8°.

Reale Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologiche dell' anno 1890. 1891. 8°.

Observatoire météorologique de l'Université in Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. XXII. Année 1890. 1890-91. Fol.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

North American Fauna. Nr. 3. 4. 1890. 8°.

Navy Department in Washington:

Astronomical Papers of the American Ephemeris. Vol. II. part V.
und Vol. IV. 1890. 4°.

Smithsonian Institution in Washington:

Report 1888 and National Museum Report 1888. 1890. 8°.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year ending 1890, June 30. 8°.
Observations for 1885. 1891. 4°.

Surgeon General's Office in Washington:

Index-Catalogue. Vol. XI. 1890. 4°.

U. S. Coast and geodetic Survey in Washington:

Report of the Superintendent during the year ending with June 1888
1889. 4°.
Bulletin. Nr. 19—21. 1891. 4°.

U. S. Geological Survey Office in Washington:

Monographs. Vol. I. Lake Bonneville by Grove Karl Gilbert. 1890. 4°.
General Resources of the U. St. Calendar, year 1888. 1890. 8°.
Bulletin. Nr. 58--61. 63--66. 1890. 8°.
10th Annual Report 1887--1888. 1889. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein des Harzes in Wernigerode:

Druckschriften. 5. Band 1890. 8°.

K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Vortragsberichte. Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse.

I. Abth. 1889 Nr. 4 - 10. 1890 Nr. 1—3.	} 1889—1890. 8°.
II ^a Abth. 1889 Nr. 4—10. 1890 Nr. 1—3.	
II ^b Abth. 1889 Nr. 4—10. 1890 Nr. 1—3.	
III. Abth. 1889 Nr. 5 - 10. 1890 Nr. 1—3.	

Druckschriften. Mathem.-naturw. Klasse. Bd. 56. 1889. 4°.
Theilungen der prähistorischen Commission. 1890. Bd. I. Nr. 2. 4°.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Abhandlungen. 1890. Nr. 14—18. 1891. Nr. 1—7. 4°.
Abhandlungen. Bd. XIV. 1890. Bd. XV. Heft 3. 1891. Fol.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. IV. Jahrg. 1891. Nr. 1—27. 4°.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Theilungen. Bd. XX. Heft 3. 4. XXI. Heft 1. und Register zu
Bd. XI—XX. 1890/91. 4°.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Theilungen. Band XXXIII. 1890. 8°.

II. Math.-phys. Cl. 2.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. 1890. Quartal 3 und 4. 8^o.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. V. Nr. 4. Bd. VI. Nr. 1. 1890/91. gr. 8^o.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. I. Suppl.-Band. Katalog der Argelander'schen Zonen von Edmund Weiss. 1890. 8^o.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftl. Kenntnisse in Wien:

Schriften. 30. Bd. 1890. 8^o.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 43. 1890. 8^o.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. XXIV. Nr. 6. 7. XXV. Nr. 1. 2. 1890—91. 8^o.

Sitzungsberichte. 1890. Nr. 8—10. 1891. Nr. 1. 1890/91. 8^o.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 35. Heft 2—4. 1890. 8^o.

Von folgenden Privatpersonen:*Florentino Ameghino in Buenos Aires:*

Revista Argentina de historia natural. Tom. I. entrega 1. 2. 1891. 8^o

Giocanni Capellini in Bologna:

Zifiodi Fossili. 1891. 4^o.

R. Fresenius in Wiesbaden:

Die Thermalquellen Wiesbadens in chemischer Beziehung. 1890. 8^o

Nikolai von Kokscharow in St. Petersburg:

Materialien zur Mineralogie Russlands. Bd. X. p. 225—352. 1891. 8^o

L. Kronecker in Berlin:

13 mathematische Abhandlungen. Separatabdrücke aus den Sitzungsberichten der Berliner Akademie und d. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1890. in 4^o u. 8^o.

A. Kurz in Augsburg:

Illarität. 2. Mittheilung. 1891. 8^o.
modernen Gastheorie. 1891. 8^o.

H. W. Middendorp in Groningen:

th des Koch'schen Heilverfahrens gegen Tuberkulose. Emden
91. 8^o.

Fürst Albert I. von Monaco:

orschung der Meere und ihrer Bewohner. Uebersetzt von
nil von Marenzeller. Wien 1891. 8^o.

Ph. Plantamour in Genf:

uments périodiques du sol. 12. année. 1890. 8^o.

Michele Stossich in Triest:

della Croazia. . Zagreb 1890. 8^o.
Veneti. II. Serie. 1891. 8^o.
: Dispharagus Dujardin. 1891. 8^o.

Jean Servais Stas in Brüssel:

ation en l'honneur de Jean Servais Stas à l'occasion du 50^e
universaire de sa nomination comme membre titulaire de la
asse des sciences. 1891. 8^o.

G. Tschermak in Wien:

ritgruppe. Theil I. II. 1890/91. 8^o.

Rudolf Wolf in Zürich:

nische Mittheilungen. Nr. LXXVII. LXXVIII. 1891. 8^o.

Silvestro Zinno in Rom:

rasformazione della glicerina in glucosio. 1890. 4^o.

Sitzungsberichte

der
kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 7. November 1891.

Herr H. SEELIGER legt den zweiten Band der neuen
den der Kgl. Sternwarte vor und macht hierauf zwei
Mittheilungen:

1. „Notiz über die Strahlenbrechung in der
Atmosphäre“:
2. „Ueber die Extinction des Lichtes in der
Atmosphäre.“

über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 7. November.)

Venn eine Kugel von einer brechenden Atmosphäre
umgeben ist, so wird dieselbe einem Beobachter ausserhalb
einen grösseren scheinbaren Durchmesser zeigen als in dem
Raum wo kein brechendes Medium die Umhüllung bildet.
Die Vergrößerung des scheinbaren Durchmessers ergiebt
sich überaus einfacher Weise und völlig streng aus den
einfachsten Sätzen der Refractionstheorie. Nimmt man,
woraus ist die einzige erforderliche Voraussetzung, an,
dass die Kugel umgebende brechende Medium in con-
stante Dichtigkeit ist.

Math.-phys. Cl. 3.

centrischen Schichten gleicher Dichtigkeit angeordnet ist und bezeichnet man mit μ den Brechungsexponenten in einer Entfernung r vom Centrum und mit i den Winkel, den die nach aussen gerichtete Tangente der Refractionscurve mit r in jenem Punkte bildet, so ist bekanntlich

$$\mu r \sin i = \text{Const.} \quad (1)$$

für alle Punkte der Refractionscurve. Wenn demnach ein Punkt der Oberfläche einen Lichtstrahl unter einem Winkel z gegen den verlängerten Radius aussendet und dieser Strahl den Beobachter trifft, so muss zufolge (1) sein:

$$\mu_0 a \sin z = J \sin \sigma$$

und hierin bedeutet: μ_0 den Brechungsexponenten an der Oberfläche des Planeten, a seinen Radius, J die Entfernung des Beobachters vom Centrum und σ die scheinbare Entfernung des genannten Punktes vom Centrum der Planetenscheibe.

Nennt man nun σ_0 den scheinbaren Radius der Planetenscheibe, wie er ohne Atmosphäre erschiene, so ist

$$a = J \sin \sigma_0$$

und demzufolge

$$\sin \sigma = \mu_0 \sin \sigma_0 \sin z.$$

Der Lichtstrahl, welcher in Betracht gezogen worden ist, wird gerade noch den Beobachter erreichen können, wenn $z = 90^\circ$ wird. Dann hat man also für den factisch stattfindenden scheinbaren Radius σ die Formel:

$$\sin \sigma = \mu_0 \sin \sigma_0$$

oder für astronomische Zwecke genügend genau

$$\sigma = \mu_0 \sigma_0. \quad (2)$$

Diese Formel gilt ganz allgemein, gleichgiltig nach welchem Gesetze die Dichtigkeit des brechenden Mediums von der Entfernung vom Centrum der Kugel abhängt. Man sieht übrigens, dass einzig und allein der Brechungsexponent an der Oberfläche in Frage kommt. Ferner ergibt sich aber

auch, dass, falls das Mittel eine Dispersion aufweist, die in verschiedenfarbigem Lichte gemessenen Radian σ von verschiedenen Grössen ausfallen müssen. Betrachten wir z. B. die Erde vom Monde aus. Hier ist für die beiden Fraunhofer'schen Linien B und G , an welchen Stellen des Spectrums die optischen Strahlen noch keineswegs unwirksam sind

$$B \dots \mu_0 = 1.000\,2935$$

$$G \dots \mu_0 = 1.000\,2987$$

und mit der Mondparallaxe $57'2''$ findet man die Vergrösserung des Erddurchmessers für:

$$B \quad . \quad . \quad . \quad 2''.0087$$

$$G \quad . \quad . \quad . \quad 2''.0443$$

$$\text{Differenz} \quad . \quad 0''.036$$

Ganz rein werden diese Differenzen in den Messungen nicht hervortreten, da durch die Absorption die brechbareren Theile des Spectrums etwas mehr geschwächt werden; auch werden die Ränder nicht mehr ganz scharf sich darstellen und schliesslich bewirkt die Diffraction der Lichtstrahlen an den Rändern des Fernrohrobjectives eine Verschiebung des scheinbaren Randes, welche wahrscheinlich von der Farbe abhängig ist. Im Allgemeinen ergiebt sich aber, dass die im blauen Lichte gemessenen Durchmesser grösser ausfallen müssen, als die im rothen und man wird berechtigt sein zu behaupten, dass bei dichteren Atmosphären von grösserer Dispersionskraft, die nicht nur denkbar sind, sondern gewiss vorkommen, die oben erwähnten Differenzen bis zu sehr bemerkbaren Beträgen wachsen können¹⁾. Es darf indessen

1) Die im Vorigen dargelegten höchst elementaren Ueberlegungen begründen die Ansichten, welche ich über diese Frage seit Jahren in meinen Vorlesungen auszusprechen pflege und auf welche sich Herr Dr. Wellmann in den „Astron. Nachrichten“ Bd. 119, S. 241 bezieht.

hierbei ein Umstand nicht ausser Acht gelassen werden, dessen Nichtberücksichtigung zu den allergrössten Irrthümern veranlassen kann. Die Formel (2) erleidet nämlich eine sehr wichtige Beschränkung, weil sie, obgleich dies aus der obigen Aufstellung nicht hervorgehen konnte, doch über die Constitution des brechenden Mediums eine gewisse Voraussetzung macht. Diese besteht darin, dass die Refractionscurve ohne Unterbrechung durch die Gleichung (1) definirt ist. Dies findet aber nicht statt, wenn totale Reflexionen eintreten. Solche totale Reflexionen sind aber bei dem Uebergange eines Lichtstrahls von dichteren Theilen des brechenden Mediums in weniger dichte unter gewissen Bedingungen möglich und da die Atmosphären der Himmelskörper unter normalen Verhältnissen mit zunehmender Höhe an Dichtigkeit abnehmen, so müssen diese Verhältnisse näher betrachtet werden. Aehnliches gilt auch, wenn ein homogenes Medium den Planeten umgiebt und in der Höhe h unstetig an den leeren Raum grenzt. Hier muss an der Grenze zufolge (1) die Gleichung stattfinden

$$\sin i = \frac{\mu_0}{a + h} \frac{a \sin z}{1}$$

und die obigen Betrachtungen erfahren keinen Widerspruch nur dann, wenn unter allen Umständen $\sin i < 1$ ist, also:

$$\frac{\mu_0}{a + h} a < 1$$

d. h. $h > (\mu_0 - 1) a.$

Ist h weniger bedeutend, dann finden totale Reflexionen an der Grenze statt. Die Verfolgung dieser in photometrischer Beziehung ist verwickelt man sieht aber sofort ein, dass unter keinen Umständen der Planet grösser erscheinen kann, als wenn die Atmosphäre zu ihm als fester Bestandtheil gehörte, weil von der Grenze dieser alle den Beobachter erreichenden Lichtstrahlen gradlinige Wege beschreiben. Um

den allgemeineren Fall in Betracht zu ziehen, muss man selbstverständlich das Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit des brechenden Mediums kennen. Dann lässt sich die Bedingung für das Nichtzustandekommen totaler Reflexionen aus der Bedingung

$$\sin i < 1$$

stets ableiten. Es soll für die Erdatmosphäre diese Bedingung aufgestellt werden. Es würde hierbei voraussichtlich genügen von den Temperaturabnahme mit der Höhe abzusehen. In gleich einfacher Weise, wie für diese Annahme, lässt sich aber die Betrachtung nach der Bessel'schen Refractionstheorie erledigen, die freilich bekanntlich den thatsächlichen physikalischen Verhältnissen nur sehr roh Rechnung trägt. Nach dieser Theorie sind die Dichtigkeit ϱ in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde und die Dichtigkeit ϱ_0 an der Oberfläche durch die Gleichung verbunden

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\beta \frac{r-a}{r}}$$

wo β eine empirisch bestimmte Constante ist. Da die Brechungsexponenten der Luft sehr wenig von 1 verschieden sind, darf auch bei Aufrechterhaltung der älteren Annahmen stets gesetzt werden

$$\mu = 1 + c\varrho_0 e^{-\beta \frac{r-a}{r}}$$

$$\mu_0 = 1 + c\varrho_0.$$

Totale Reflexionen werden nun jedenfalls ausgeschlossen sein, wenn

$$\mu r > \mu_0 a.$$

Setzt man zur Abkürzung $s = \frac{r-a}{r}$ so kann man diese Bedingung schreiben

$$1 - e^{-\beta s} < \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1} \cdot s \quad (3)$$

Nun ist $\frac{d(1 - e^{-\beta s})}{ds} = \beta e^{-\beta s}$ stets positiv und nimmt mit

wachsendem s ab, während die rechte Seite von (3) ebenfalls positiv ist und gleichmässig wächst. Für $s = 0$ werden beide Seiten von (3) gleich Null. Wenn demnach für $s = 0$

$$\beta e^{-\beta s} < \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1}$$

so wird diese Bedingung (3) auch für alle grösseren s erfüllt sein. Demnach werden totale Reflexionen nicht eintreten können, wenn:

$$\beta < \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1} \quad (4)$$

Die Verhältnisse der Erdatmosphäre sind nun sehr weit von dieser Bedingung entfernt, denn es ist

$$\mu_0 - 1 \text{ nahe } = \frac{1}{3399}$$

und es müsste nach (4) sein

$$\beta < 3400.$$

In der That ist aber $\beta = 746$.

Wie sich die Sache auf einem physikalisch so total von der Erde verschiedenen Körper, wie es die Sonne ist, verhält, kann man nicht von vornherein wissen. Ich werde aber in einem andern Aufsätze zeigen, dass gewisse Wahrnehmungen dafür zu sprechen scheinen, dass dort wirklich totale Reflexionen stattfinden. Im anderen Falle müssten die in den verschiedenen Theilen des Spectrums gemessenen Sonnendurchmesser um so bedeutende Grössen verschieden sein, dass dies den Beobachtern nicht hätte entgehen können, obwohl ähnlichen Fragen bisher noch nicht die genügende Aufmerksamkeit geschenkt worden ist.

Die Dispersion des Lichtes in der Erdatmosphäre äussert sich in der Erscheinung, dass die einfachen Lichtpunkte der Fixsterne zu Spectren sich verlängern. Die Länge dieser Spectren $\delta \zeta$ lässt sich sehr leicht berechnen. Bis zu Zenithdistanzen von etwa 80° wird man mit genügender Genauigkeit ansetzen dürfen

$$\delta \zeta = 2 \zeta \cdot \frac{\delta \mu_0}{\mu_0^2 - 1} \quad (5)$$

wo ζ die Refraction in Zenithdistanz und $\delta \mu_0$ die Differenz der an der Erdoberfläche stattfindenden Brechungsexponenten für die Farben des Spectrums, welche die Grenzen desselben angeben, bedeuten.

Herr Ketteler¹⁾ hat die Dispersion der Luft untersucht und gefunden:

Linie	λ	μ_0	Δ
<i>B</i>	0.687	1.000 29353	— 4
<i>C</i>	0.656	29383	— 1
<i>D</i>	0.589	29470	+ 2
<i>E</i>	0.527	29584	+ 2
<i>F</i>	0.486	29685	+ 3
<i>G</i>	0.431	29873	— 2
<i>H</i>	0.397	30026	— 1

Hier sind die Wellenlängen in $\frac{1}{1000}$ mm. angesetzt. Ich finde hieraus durch die Cauchy'sche Dispersionsformel

$$\mu = 1.000\,29010_5 + 159.9 \frac{1}{\lambda^2}$$

welche Formel die äusserst kleinen Fehler Δ im Sinne Rechnung-Beobachtung übriglässt.

Setzt man $\lambda_0 = 0.575$, ungefähr entsprechend dem hellsten Theile des Spectrums, so wird

1) U. A. Mousson, Lehrbuch der Physik. II S. 548.

$$\delta \zeta = 0.00542 \zeta \cdot \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} \right)$$

und wenn nach der Bessel'schen Refractionstafel

$$\zeta = 57.7 \operatorname{tg} z$$

gesetzt wird, so ergibt sich:

$$\delta \zeta = A \operatorname{tg} z$$

$$A = \frac{0''.313}{\lambda^2} - 0''.946$$

Man findet hieraus für

$$\lambda = 0.400; A = + 1.01$$

$$\lambda = 0.700; A = - 0.31$$

Die Gesamtlänge des kleinen Spectrums innerhalb d
angegebenen Grenzen ist also 1.32. Vor kurzer Zeit b
Herr P. Henry¹⁾ durch Versuche für dieselbe Grösse 1".
gefunden, was auf eine etwas grössere Dispersion hindeut
würde, als Herr Ketteler gefunden hat.

1) Compt. Rend. Band 112.

Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 7. November.)

Die Extinction des Fixsternlichtes in der Atmosphäre ist in genauerer Weise zuerst von Herrn Seidel¹⁾ und in neuerer Zeit von Herrn G. Müller²⁾ empirisch bestimmt worden. Die Resultate beider Beobachter stimmen ziemlich nahe mit einander überein und man kann behaupten, dass die von beiden Beobachtern gegebenen Extinctionstabellen in ihrem charakteristischen Verlaufe sogar vollständige Aehnlichkeit zeigen.

Aber auch mit der Theorie stimmen diese Tabellen bis zu sehr grossen Zenithdistanzen überein, wie im folgenden erwähnt wird und wie auch ganz neuerdings Herr G. Müller gezeigt hat. Diese letztere Arbeit des Herrn Müller ist mir indessen erst nach Abschluss meiner Rechnungen bekannt geworden, was ich deshalb erwähne, weil ich die von mir abgeleiteten Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung anführen und benutzen werde und nicht die a. a. O. gegebenen.

Was die Theorie der Extinction betrifft, so kann die von Lambert aufgestellte ganz ausser der Betrachtung bleiben;

1) Abhandlungen der kgl. bayer. Akademie, Band VI, 3. Abtheilung, 1852.

2) Publicationen des Potsdamer Observatoriums, Band III, 1883 und Band VIII, 1891.

denn dieselbe ist nichts weiter als eine Interpolationsformel, welche mehr zu bestimmende Parameter enthält, als nothwendig sind. Dagegen besitzen die von Laplace¹⁾ abgeleiteten Formeln einen hohen Grad der Allgemeinheit. Um hierüber keinen Zweifel zu lassen, werde ich dieselben in Artikel 1 des folgenden Aufsatzes in etwas allgemeinerer Weise ableiten, als von Laplace geschehen ist. Dagegen sind in neuester Zeit besonders von Herrn Langley²⁾ beachtenswerthe Einwendungen gegen die Voraussetzungen, auf welchen diese Extinctionstheorie gegründet ist, erhoben worden. Obwohl schon auch von anderer Seite bemerkt worden ist, dass diese Einwände in practischer Beziehung nicht so folgenschwer sein können, als Herr Langley vermuthet hat, so schien es mir doch nicht ganz unnütz, auf diesen Gegenstand noch einmal zurückzukommen. Dies soll in Artikel 2 geschehen. Schliesslich soll in Artikel 3 die Extinction in der Sonnenatmosphäre betrachtet werden. Die vorliegenden Beobachtungen lassen allerdings nur ziemlich unsichere Schlüsse zu. Es scheinen aber durch sie merkwürdige und von vornherein nicht zu erwartende Andeutungen über gewisse Eigenschaften der Sonnenatmosphäre gegeben zu sein, die kurz besprochen zu werden verdienen.

1.

Bezeichnet μ den Brechungsexponenten der in kugelförmigen Dichtigkeitsschichten angeordneten Atmosphäre in der Entfernung r vom Centrum, μ_0 denselben für die Oberfläche der Erde, deren Radius a sei, ferner $\delta\zeta$ das Element der Refraction im Sinne: scheinbare Zenithdistanz weniger wahre, i den Winkel zwischen der nach Aussen gerichteten Tangente an die Refractionscurve und r , φ die scheinbare

1) *Mécanique céleste*, Band IV.

2) *American Journal of Science* 1884. Vol. 28.

Zenithdistanz des Fixsterns, ds ein Längenelement der Refractioncurve, so ist bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} \mu r \sin i &= \mu_0 a \sin z \\ ds &= \frac{dr}{\cos i} \\ d\zeta &= -\frac{d\mu \operatorname{tg} i}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Setzt man noch, wie üblich

$$\mu^2 - 1 = c \varrho$$

wo c eine Constante und ϱ die Dichtigkeit der Luft ist, so hat man

$$d\zeta = -\frac{c}{2\mu^2} \operatorname{tg} i d\varrho$$

Der Absorptionscoefficient wird zufolge sehr plausibler Annahmen der Luftmasse proportional gesetzt, welche der Lichtstrahl trifft.

Demzufolge hat man für die Intensität des beobachteten Sternlichtes J die Gleichung

$$\frac{dJ}{J} = -Q \varrho ds$$

was man mit Hilfe von (1) so schreiben kann:

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{2Q\mu^3}{c\mu_0 a \sin z} \varrho \frac{d\zeta}{d\varrho} r dr \quad (2)$$

Nach der Bessel'schen Refractionstheorie, welche die beobachteten Erscheinungen im Allgemeinen gut darstellt und welche deshalb hier angenommen werden soll, ist

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\beta \frac{r-a}{r}}$$

wo ϱ_0 die Dichtigkeit der Luft an der Erdoberfläche und β eine empirisch bestimmte Constante ist. Hieraus folgt

$$\varrho \frac{dr}{d\varrho} = -\frac{r^2}{\beta a}$$

und hierdurch wird (2):

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{2Qa}{c\mu_0\beta} \left(\frac{\mu r}{a}\right)^3 \frac{d\zeta}{\sin z}$$

Der Factor $\left(\frac{\mu r}{a}\right)^3$ weicht nur dort von 1 merklich ab, wo $d\zeta$ sehr klein ist; aus diesem Grunde wird man ihn, wie dies in ähnlicher Weise bei der Entwicklung der meisten Refractionstheorien geschieht, fortlassen können. Es wird demnach, wenn H eine Constante bedeutet:

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{H}{\sin z} \cdot d\zeta$$

und integrirt

$$\log J = C - \frac{H}{\sin z} \cdot \zeta \quad (3)$$

Die gewöhnlichen Refractionstafeln geben die Refraction ζ in der Form

$$\zeta = \alpha \operatorname{tg} z$$

wo α mit z selbst veränderlich ist. Bezeichnet man nun mit J_1 die Lichtintensität des Sternes, wenn derselbe im Zenith stände, und mit J_0 die Intensität des ungeschwächten Sternlichtes, so ergibt sich aus (3)

$$\left. \begin{aligned} \log \frac{J}{J_1} &= -H \frac{\alpha - \alpha_0 \cos z}{\cos z} \\ \log \frac{J_1}{J_0} &= -H \alpha_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dies sind die bekannten von Laplace gegebenen Gleichungen.

Unter der Correction wegen Extinction $\log \varphi$ versteht man die Grösse, welche zu den beobachteten Helligkeitslogarithmen zu addiren ist, um auf das Zenith zu reduciren.

Aben nun aus der a. a. O. gegebenen Extinctionstabelle
 Herrn G. Müller die Werthe von $\log q$ in passend ver-
 en Intervallen herausgenommen und diese Werthe durch
 Formeln (4) nach der M. d. kl. Q dargestellt. Die
 er'schen Werthe sind mit M, die aus der Formel
 den mit L bezeichnet.

zapp	M	L	M—L	x
0°	0	0	0	1.0
20	0.004	0.005	— 1	1.1
40	0.024	0.023	+ 1	1.3
50	0.048	0.043	+ 5	1.6
60	0.092	0.077	+ 15	2.0
70	0.180	0.146	+ 34	2.9
75	0.261	0.216	+ 45	3.8
80	0.394	0.352	+ 42	5.6
81	0.432	0.395	+ 37	6.1
82	0.477	0.448	+ 29	6.8
83	0.533	0.515	+ 18	7.7
84	0.607	0.599	+ 8	8.8
85	0.707	0.707	— 0	10.2
86	0.846	0.859	— 13	12.1
87	1.045	1.066	— 21	14.8
87.5	1.176	1.208	— 32	16.7

ie Constante H ergab sich aus

$$\log (H \alpha_0) = 8.8874 - 10$$

$$\frac{J_1}{J_0} = 0.837$$

ie Darstellung der Beobachtungen ist eine recht be-
 ende. Indessen sind die Differenzen doch von systema-
 n Character, dem wir um so grösseres Gewicht zusprechen
 1, als auch die Seidel'schen Beobachtungen, die mit
 ganz anderen Instrumente ausgeführt sind, Abwei-

chungen von der Theorie in demselben Sinne geben. W des Folgenden fassen wir das Resultat der Vergleichung Beobachtungen mit der als richtig vorausgesetzten Th so zusammen. Die beobachteten Helligkeiten stimmen 0° und 85° Grad Zenithdistanz völlig mit den berech überein. Dazwischen sind die ersteren etwas kleiner, da hinaus sind dieselben etwas grösser.

2.

Herr Langley hat zuerst darauf aufmerksam gem dass die obige Absorptionsformel strenge genommen für einfarbiges Licht giltig ist. Nennt man die wirk also beobachtete Intensität des Lichtes eines Sternes J_B muss gesetzt werden

$$J_B = B_1 c_1^\gamma + B_2 c_2^\gamma + \cdots + B_n c_n^\gamma \quad (1)$$

wo die einzelnen c die Transmissionscoefficienten der verschiedenen Theile des Spectrums sind und die B die Ant der einzelnen Farben an der Gesamtintensität darste γ giebt die Dicke der Luftschicht, auf welche sich J_B be hängt also in einfacher Weise von der Zenithdistanz ab. im obigen auseinandergesetzte Extinctionstheorie nimm gegen auch im Allgemeinen, wie bei einfarbigem Licht

$$J_R = C A^\gamma$$

Man kann sich nun die Berechnung der 2 willkür Constanten C und A in letzterer Formel so ausgeführt de dass für 2 Zenithdistanzen, also für 2 verschiedene W von γ , $J_B = J_R$ gemacht worden ist. Es fragt sich dann die Differenz $\log J_B - \log J_R$, als Function der Zenithdist dargestellt, verläuft. Die beiden Werthe für γ , für w J_B und J_R übereinstimmen, seien γ_0 und γ_1 . Dann ist

$$C A^{\gamma_0} = B_1 c_1^{\gamma_0} + \dots + B_n c_n^{\gamma_0}$$

$$C A^{\gamma_1} = B_1 c_1^{\gamma_1} + \dots + B_n c_n^{\gamma_1}$$

Setzt man noch

$$\gamma_1 = m \gamma_0, \text{ wo } m > 1$$

$$c_1^{\gamma_0} = b_1; c_2^{\gamma_0} = b_2 \dots c_n^{\gamma_0} = b_n$$

und allgemein

$$\gamma = x \gamma_0$$

so findet man leicht

$$J_B(x) = B_1 b_1^x + B_2 b_2^x + \dots + B_n b_n^x$$

$$J_R(x) = (B_1 b_1 + \dots + B_n b_n) \cdot \left(\frac{B_1 b_1 + \dots + B_n b_n}{B_1 b_1^m + \dots + B_n b_n^m} \right)^{\frac{1-x}{m-1}}$$

$$C A^{\gamma_0} = J_B(1)$$

$$C^{m-1} = \frac{(J_B(1))^m}{J_B(m)}$$

und demzufolge

(3)

$$Z_m(x) = \left(\frac{J_B(x)}{J_R(x)} \right)^{m-1} \frac{(B_1 b_1^x + \dots)^{m-1} (B_1 b_1 + \dots + B_n b_n)^{x-m}}{(B_1 b_1^m + \dots + B_n b_n^m)^{x-1}}$$

Hieraus lässt sich für ganze m sehr leicht, wie bereits Herr Langley gezeigt hat und für beliebige m auf etwas complicirtere Weise zeigen, dass jederzeit $Z_m(0) > 1$ also $J_B > J_R$ für $\gamma = 0$ ist. Es folgt hieraus, dass die gewöhnliche Extinctionstheorie die Schwächung des Sternlichtes im Zenith zu klein giebt und hieraus hat Herr Langley geschlossen, dass der aus der Extrapolation der gewöhnlichen Extinctionstheorie hervorgehende Werth $\frac{J_1}{J_0}$ um einen sehr beträchtlichen Procentsatz verkleinert werden müsse, und zwar wollte er es wahrscheinlich machen, dass der richtige Werth

durch den Einwand Herrn Langley's getroffen wird. In der genannten Tabelle wird $\log Z(x) = 0$ für $z = 0$ und $z = 85^\circ$, was den Werthen $x = 1$ und $x = 10.2$ entspricht. Es sind übrigens zur besseren Uebersicht in der genannten Tabelle gleich die den verschiedenen z entsprechenden Werthe von x mit aufgeführt worden.

Man kann nun auch den Transmissionscoefficienten der Luft im Zenith $\alpha = A^{\gamma_0}$ aus jeder einem beliebigen x zugehörigen Lichtintensität berechnen. Diese Werthe von α werden unter einander nicht übereinstimmen. Denn es ist

$$\alpha = \left(\frac{B_1 b_1^x + \dots + B_n b_n^x}{B_1 b_1 + \dots + B_n b_n} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

was man mit Hülfe von (3) auch schreiben kann:

$$\alpha = \left(\frac{J_B(x)}{J_R(x)} \right)^{\frac{1}{x-1}} \cdot \left(\frac{B_1 b_1^m + \dots + B_n b_n^m}{B_1 b_1 + \dots + B_n b_n} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

oder auch

$$\log \alpha = \frac{J_B(x) - \log J_R(x)}{x - 1} + \frac{\log J_B(m) - \log J_B(1)}{m - 1}$$

Nach den Müller'schen Beobachtungen der obigen Tabelle ist

$$m = 10.2; \log J_B(m) - \log J_B(1) = -0.707$$

d. h.

$$\log \alpha = \frac{\log J_B(x) - \log J_R(x)}{x - 1} - 0.0768 \quad (4)$$

Es folgt hieraus, was eigentlich von vornherein selbstverständlich war, dass $\log \alpha$ für $x = 1$ und $x = m$ denselben Werth erhält, ferner dass für dazwischenliegende Werthe $\log \alpha$ kleiner ist. Indessen werden durch die Division mit $x - 1$ die Abweichungen in $\log \varphi$ zwischen Beobachtung und Rechnung wesentlich verkleinert. Man kann sofort aus den Zahlen der obigen Tabelle die verschiedenen Werthe, welche für $\log \alpha$ hervorgehen, angeben und da diese nur wenig von einander abweichen, so wird man, im Gegensatze zu einer

— Verhandlungen der phys. Classe vom 7. November 1891.

... diese Behauptung, in der Ueberein-
 ... nur einen sehr wenig entschei-
 ... die Berechtigung der Langley'-
 ...

... Man kann man aber zeigen, dass aus den
 ... der beobachteten und berechneten
 ... diese nur durch eine im
 ... Extinctionstheorie entstanden sind.
 ... Annahmen auf die Abweichung
 ... gestattet ist, was im Allgemeinen
 ... Extinction gleichkommt. Hierbei sollen die
 ... mit dem Bolometer gefundenen Trans-
 ... Grunde gelegt werden.

... ergibt sich sofort der Ausdruck

$$\{Z(x) \cdot Z(0)\}^{\frac{1}{m-1}} =$$

$$\frac{(B_1 + \dots + B_n) \left(\frac{B_1 b_1}{B_1 b_1^m + \dots + B_n b_n^m} \right)^{\frac{x-2}{m-1}}}{-B_n b_n^m}$$

... Dieser Ausdruck für $x=2$, nämlich:

$$= \frac{(B_1 + \dots + B_n) (B_1 b_1^2 + \dots + B_n b_n^2)}{(B_1 b_1 + \dots + B_n b_n)^2}$$

$$+ \frac{B_1 B_2 (b_1 - b_2)^2 + \dots}{(B_1 b_1 + \dots + B_n b_n)^2}$$

... Werth des zweiten Gliedes rechts (I)

... man β den grössten Werth, den

$$\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right)^2$$

... falls (I) kleiner als

$$2 B_1 B_2 b_1 b_2 + \dots$$

$$(B_1 b_1 + \dots + B_n b_n)^2$$

und da der zweite Factor wiederum viel kleiner als 1 ist, jedenfalls

$$\{Z(0) \cdot Z(2)\}^{\frac{1}{m-1}} < 1 + \beta$$

Die Transmissionscoefficienten b der nicht ganz lichtschwachen Regionen im Sonnenspectrum bewegen sich, wenn man von selectiven Absorptionswirkungen absieht, innerhalb der Grenzen $b=0.64$ und $b=0.80$. Man findet hiernach für den Maximalwerth β :

$$\beta < 0.03125$$

und hieraus

$$\frac{J_B(0)}{J_R(0)} \cdot \frac{J_B(2)}{J_R(2)} < 1.03125$$

Nach der obigen Tabelle ist

$$\log \frac{J_B(2)}{J_R(2)} = -0.015$$

woraus man findet

$$\frac{J_B(0)}{J_R(0)} < 1.07$$

Danach ergiebt sich der Transmissionscoefficient des Lichts um weit weniger zu klein als um etwa 7%.

In Wirklichkeit aber sind alle diese Rechnungen auf Hypothesen begründet, die bei der optischen Photometrie gar nicht zulässig sind. Die physiologischen Wirkungen der einzelnen Farben in einem gewöhnlichen Spectrum concentriren sich ausserordentlich im Gelb und hier ist es nur eine schmale Zone, die an Wirkung auf das Auge alle andern Farben so ausserordentlich übertrifft, dass man z. B. beim Sonnenlicht fast nur sie allein zu berücksichtigen nöthig hat. Bei auffallend gefärbten Sternen mag die Sache sich anders verhalten; bei der überwiegenden Anzahl der Sterne aber sehr wahrscheinlich nicht. Man kann für das Sonnenspectrum die betreffende Rechnung ausführen, wenn man die B proportional den relativen physiologischen Intensitäten der einzelnen Spectralfarben setzt und für die b die von

Herrn Langley selbst angegebenen Werthe, welche sich zwischen 0.6 und 0.8 bewegen, einsetzt. Dann ergibt sich

für $\frac{J_B(0)}{J_R(0)}$ der von 1 minimal verschiedene Betrag von etwa

1.01. Eine solche Rechnung ist freilich insofern eine hypothetische, weil, soviel ich weiss, nicht bekannt ist, ob sich bei der Mischung von Farben die Intensitäten nach diesem Grundsatz zusammensetzen. Um indessen auch für andere und zwar wesentlich verschiedene Annahmen einen Ueberblick über den Verlauf der Function Z zu gewinnen, habe ich noch einige Rechnungen angestellt, die hier kurz angeführt werden mögen.

Trägt man die einzelnen b , wie sie z. B. Herr Langley gefunden hat, als Function der Wellenlänge λ auf, so erhält man eine sehr schwach gekrümmte Curve. Es ist deshalb erlaubt, bei Ueberschlagsrechnungen für diese Curve eine gerade Linie zu setzen und anzunehmen

$$db = a d\lambda.$$

Nimmt man noch einen stetigen Verlauf der Absorption innerhalb des Spectrums an, sieht also von dem Einflusse der dunklen Linien ab, und setzt alle $B=1$, was also eine gleiche physiologische Helligkeit aller Farben voraussetzt, so ist

$$\sum B b^x = \frac{1}{a(\lambda_1 - \lambda_0)} \cdot \frac{b_1^{x+1} - b_0^{x+1}}{x+1}$$

worin λ_0 und λ_1 die Wellenlängen für die Grenzen des sichtbaren Spectrums und b_0 und b_1 die diesen entsprechenden Transmissionscoefficienten bedeuten. Die Formel (3) giebt dann

$$\frac{J_B(\lambda)}{J_R(\lambda)} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{b_1^{x+1} - b_0^{x+1}}{b_1^2 - b_0^2} \cdot \left(\frac{b_1^2 - b_0^2}{2^{x+1} - b_1^{x+1} - b_0^{x+1}} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

oder wenn

$$\frac{b_0}{b_1} = y$$

gesetzt wird:

$$\frac{J_B(x)}{J_R(x)} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-y^{x+1}}{1-y^2} \cdot \left\{ \frac{m+1}{2} \cdot \frac{1-y^2}{1-y^{m+1}} \right\}^{\frac{x-1}{m-1}}$$

Als numerisches Beispiel möge den Langley'schen Werthen von b für die Wellenlängen 0.666 und 0.430 ungefähr entsprechend $\log y = 9.8920 - 10$ und der obigen Darstellung der Müller'schen Beobachtungen zufolge $m = 10.16$ gesetzt werden. Dann ergibt sich

$$X = \log J_B(x) - \log J_R(x) = 0.7079 + \log \left(\frac{1-y^{x+1}}{1+y} \right) + (x-1) [0.04014]$$

und hiermit für die linke Seite dieser Gleichung

x	X	M—L
0	+ 0.011	
1	0	0
2	— 0.008	— 0.015
3	— 0.014	— 0.037
4	— 0.018	— 0.047
5	— 0.020	— 0.046
6	— 0.020	— 0.038
8	— 0.014	— 0.014
10	— 0.001	0
12	+ 0.018	+ 0.013
14	+ 0.043	+ 0.022
16	+ 0.073	+ 0.030
18	+ 0.108	

Eine grosse Aehnlichkeit des Verlaufes von X mit dem der aus einer graphischen Darstellung der $M-L$ entnommenen Werthe ist nicht zu leugnen. Wenn man auch diesem ziemlich willkürlich gewählten Beispiele keine grosse Wichtigkeit zuertheilen kann, so scheint doch auch diese Annahme dafür zu sprechen, dass ein Theil der Differenzen $M-L$ in der

Trotz dem ist der von Herrn Langley erhobene Einwand erklärbar. Im Widerspruch steht nämlich der Umstand, dass auch hier bei $x = 0$ der Werth von X sehr klein und nicht von Belang ist. Der extrapolirte Werth für $x = 0$ wie die Zahlen zeigen, ist geringer als die Abweichung zwischen $x = 1$ und $x = 10$ und völlig verschwindend gegen die Werthe für sehr grosse x . Es ist ja von vornherein klar, dass bei sehr kleinen Höhen die Erdoberflächentheorie auf nicht mehr astronomisches Licht angewandt, grössere Fehler zeigen muss.

Wie in dem angeführten Beispiele ein besserer Anschluss an die Beobachtungen erreichbar war, als sich thatsächlich (die Beobachtungen des Herrn Müller ergeben hat, so kommt man bei der Annahme $y = 0$ zu ganz enormen Abweichungen. Für diesen Fall hat man

$$X = \log J_2(x) - \log J_2(21) \\ = 0.3010 - \log 1 - x = 1 - x = 1 - [0.0823]$$

in dem m nach $x = 10$ angenommen wird.

x	X
0	= 0.219
1	0
2	= 0.094
3	= 0.167
4	0.151
5	0.148
6	= 0.133
7	= 0.109
8	0.077
9	= 0.041
10	0

Bemerkenswerth erscheint aber, dass selbst hier der Werth von X für $x = 0$ einzelne Werthe zwischen $x = 1$ und x nicht so bedeutend übersteigt, dass sich die Grösse des extrapolirten Werthes für $x = 0$ nicht sofort in den Abweichung zwischen Beobachtung und Theorie verrathen müsste.

Die Differenzen $M - L$ sind hier so angesetzt, wie sie sich aus einer graphischen Darstellung der in der ursprünglichen Tabelle enthaltenen Differenzen ergaben und mögen vielleicht in der letzten Stelle nicht ganz sicher sein. Was nun die Grössen X betrifft, so zeigen dieselben in der That die Eigenschaft, dass sie für $x = 0$ bis 1 wesentlich positiv sind und zwischen $x = 1$ bis $x = 10$ negativ bleiben und zwar zu nicht sehr bedeutender Höhe anwachsen. Aber schon die letzteren Differenzen dürften sich kaum mit den Beobachtungen vereinigen lassen, wie die Vergleichung mit den Zahlen $M - L$ beweist. Für grosse Zenithdistanzen ($m > 10$) ist vollends die Abweichung so enorm, dass man sagen muss, das Langley'sche Beispiel entspricht auch nicht entfernt den durch die Beobachtungen angezeigten Verhältnissen. Man wird schon hieraus vermuthen, dass es auch zwischen $x = 0$ und $x = 1$ sich nicht bestätigen wird. Es kann dies natürlich nur durch Beobachtungen auf hohen Bergen untersucht werden und in der That sprechen die von Herrn Müller auf dem Säntis angestellten Beobachtungen keineswegs dafür, dass die Einwände des Herrn Langley eine solche practische Bedeutung haben, wie derselbe meinte.

Man wird nach alledem behaupten dürfen, dass für die Photometrie, welche die Stärke des Lichtes nach seinen physiologischen Wirkungen misst, die Einwände des Herrn Langley, trotz ihrer prinzipiellen Richtigkeit und Wichtigkeit, von keiner grossen Bedeutung sind. Andeutungen der erwähnten Einwirkungen zeigen sich, wie in dem Früheren auseinandergesetzt worden, in unzweifelhafter Weise. Dass dieselben aber nur in sehr verkleinertem Maassstabe eintreten können, wird nach den obigen Bemerkungen erklärlich erscheinen. Jedoch wurde hierbei stets von der selectiven Absorption abgesehen. Diese kann in den obigen Formeln dadurch zum Ausdruck gebracht werden, dass man eine ihrer Stärke entsprechende Anzahl von Strahlen mit sehr

nothwendig, die Lichtvertheilung innerhalb der Spectra der beobachteten Sterne zu untersuchen und in Rechnung zu ziehen. Jedenfalls ergibt sich, dass das Resultat der Extinctionsbeobachtungen in verwickelter Weise von vielen Umständen abhängt. Dass die Färbung der Sterne von Einfluss auf dieses Resultat ist, haben ebenfalls die Beobachtungen des Herrn G. Müller deutlich gemacht.

3.

Es ist jedenfalls eine interessante Aufgabe, zu versuchen, ob die Laplace'sche Extinctionstheorie auch noch auf einen von der Erde so sehr verschiedenen Körper, wie die Sonne, anwendbar bleibt.

Denkt man sich die Sonne als einen glühenden Körper, so wird dieselbe sich, wenn andern die für solche Körper geltenden photometrischen Grundgesetze Geltung behalten, als gleichförmig helle Kreisscheibe darstellen. Es war schon Bessel bekannt, dass dies nicht der Fall ist, vielmehr die Helligkeit vom Mittelpunkt nach dem Rande merklich abnimmt. Hierin hat Laplace auf das Vorhandensein einer äusseren, dunklen Sonnenatmosphäre geschlossen. Seine den Beobachtungen entsprechenden Rechnungen gehen aber von einem andern als allgemein anerkannten Gesetze über die Helligkeit der verschiedenen Theile der Kugel aus.

durch die Beibehaltung der Heiligscheitelvertheilung
auf dem Scheitel und den neueren Zeit von Herrn
Herrn V. ... und zwar mit einem
... Messungen auch
... Verbesserung des

Ich habe nun die Beobachtungen des Herrn Vogel zunächst mit dem Werthe $\mu_0 = 1$ nach Formel (1) reducirt und die besten Werthe von ν im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate, angewandt auf die Helligkeitslogarithmen, für jede Farbe abgeleitet. Man findet alles in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Es sind unter B die beobachteten und unter R die berechneten J (Numeri) gegeben. Ich habe hierbei nur einen Auszug aus den Vogel'schen Tabellen benutzt und die Ausgleichung bezieht sich auf die Helligkeiten für $\varrho = 0.0, 0.1, 0.2 \dots 0.9$. Die Werthe für $\varrho = 0.95$ sind nur zur Vergleichung angesetzt, denn es war doch von vornherein nicht zu erwarten, so nahe am Rande noch mit der Formel (1) auszureichen. Die Wellenlänge der Farbe, in welcher die Messung ausgeführt worden, ist in 0.001 mm angesetzt.

Violett			Dunkelblau		Blau		Grün		Gelb		Roth	
$\lambda = 0.409$			$\lambda = 0.443$		$\lambda = 0.470$		$\lambda = 0.513$		$\lambda = 0.579$		$\lambda = 0.662$	
ϱ	B	R	B	R	B	R	B	R	B	R	B	R
0.0	10.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
0.1	99.6	99.7	99.7	99.6	99.7	99.8	99.7	99.8	99.8	99.8	99.9	99.9
0.2	98.5	98.7	98.7	98.9	98.9	99.1	98.7	99.0	99.2	98.2	99.5	99.5
0.3	96.3	97.1	96.8	97.3	97.2	97.9	96.9	97.8	98.2	98.0	98.9	98.8
0.4	93.4	94.6	94.1	95.0	94.7	96.0	94.3	95.9	96.7	96.8	98.0	97.7
0.5	89.7	91.0	90.2	91.7	91.3	93.0	90.7	93.1	91.5	93.8	96.7	96.1
0.6	82.4	85.9	84.9	87.0	87.0	89.3	86.2	89.1	90.9	90.2	94.8	93.7
0.7	74.4	78.3	77.8	80.0	80.9	83.4	80.0	83.1	84.5	84.7	91.0	90.2
0.8	63.7	66.5	67.0	68.9	71.7	73.9	70.9	73.5	74.6	75.9	84.3	84.1
0.9	47.7	45.4	50.2	49.8	57.6	55.7	56.6	55.1	59.0	58.6	71.0	71.5
[0.95]	34.7	26.8]	[35.0	29.3]	[45.6	36.9]	[44.0	36.2]	[46.0	40.8]	[53.0	56.5]
$\nu = 0.2655$			0.2419		0.1969		0.2004		0.1795		0.1127	
log $\nu = 9.4240$			9.3837		9.2941		9.3018		9.2542		9.0517	

Aus den Werthen ν ergeben sich für den Transmissions-
coefficienten der Sonnenatmosphäre (Intensität für $z = 1$
dividirt durch die ungeschwächte Intensität)

Roth	. . .	0.77	Blau	. . .	0.64
Gelb	. . .	0.66	Dunkelblau	. . .	0.57
Grün	. . .	0.63	Violett	. . .	0.54

	Violett		Dunkelblau		Blau		Grün	
	$\frac{1}{\mu_0} = 0.947$		$\frac{1}{\mu_0} = 0.947$		$\frac{1}{\mu_0} = 0.92$		$\frac{1}{\mu_0} = 0.92$	
ϱ	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>B</i>	<i>R</i>
0.4	93.4	93.1	91.1	91.1	94.7	94.8	94.3	94.7
0.5	88.7	88.7	90.2	90.3	91.3	91.5	90.7	91.3
0.6	82.4	82.8	84.9	85.0	87.0	87.0	86.2	86.5
0.7	74.4	74.8	77.8	77.7	80.8	80.6	80.0	80.0
0.8	63.7	63.7	67.0	67.0	71.7	71.5	70.9	70.9
0.9	47.7	47.7	50.2	50.2	57.6	57.7	56.6	56.6
0.95	[34.7	36.8]	[35.0	37.8]	[45.6	47.6]	[44.0	46.4]
ν	40.4101		0.3268		0.3048		0.3155	
$\log \nu$	9.6134		9.5142		9.4840		9.4990	
	$\frac{J_0}{i} = 0.39$		0.47		0.50		0.48	

Wie man sieht, ist schon jetzt die Darstellung eine so vollkommene geworden, dass es völlig illusorisch wäre, etwa durch Veränderung von μ_0 einen noch besseren Anschluss zu erzielen. Eine Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate scheint mir vorderhand nicht am Platz, da es sich durchaus nur um Abweichungen handelt, die von den Beobachtungen kaum verbürgt werden können. Man wird aber auch nicht den Zahlenwerthen μ_0 allzu grosses Gewicht beilegen dürfen und als gesicherte Folgerung darf nur gelten gelassen werden, dass man mit solchen Werthen von μ_0 , welche um einige Hundertstel grösser als 1 sind, die vorhandenen Beobachtungen in den obigen vier Farben gut darstellen kann, während dies bei Roth und Gelb schon mit Werthen von μ_0 , welche sich nicht merklich von 1 unterscheiden, gelungen ist. Um nun einzusehen, auf welche Verhältnisse in der Sonnenatmosphäre die angestellten Rechnungen hindeuten, muss zuerst hervorgehoben werden, dass die Formel (1) schon bei der Berechnung der Extinction in der Erdatmosphäre nicht ausreichend ist. Denn es genügt nicht, in dem Ausdruck

$$\xi = \alpha \operatorname{tg} z_0$$

wo z_0 die scheinbare Zenithdistanz ist, α als constant voraussetzen, wohl aber wird es bei den in diesem Artikel vorkommenden Zenithdistanzen genügen, zu setzen:

$$\zeta = \alpha \operatorname{tg} z_0 - \gamma \operatorname{tg}^3 z_0$$

woraus die Extinctionsformel hervorgeht

$$\log \frac{J}{J_0} = -\nu \left\{ \frac{1 - \cos z_0}{\cos z_0} - \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\sin^2 z_0}{\cos^3 z_0} \right\} \quad (3)$$

Die z_0 sind bei den vorliegenden Sonnenbeobachtungen nicht bekannt. Die Rechnungen zeigten, dass man mit den beiden Formeln (2) und (1) auskommt; die gefundenen μ_0 sind nun aber keineswegs die Brechungsquotienten an der Sonnenoberfläche, vielmehr sagen sie nur aus, dass die Brechungen in der Sonnenatmosphäre nicht mehr nach (1), sondern nach der allgemeineren Formel (3) berechnet werden müssen. Um dies einzusehen braucht man nur die gefundenen von 1 wenig verschiedenen Werthe

$$\mu_0 = 1 + \lambda$$

zu setzen und die zweiten und höheren Potenzen von λ zu vernachlässigen. Setzt man dann

$$\sin z = \sin z_0 + \lambda \sin z_0$$

in die Formel (1) ein, so ergibt sich sofort

$$\log \frac{J}{J_0} = -\nu \left\{ \frac{1 - \cos z_0}{\cos z_0} - \lambda \frac{\sin^2 z_0}{\cos^3 z_0} \right\} \quad (1)$$

also genau die Formel (3), wenn nur

$$\lambda = \frac{\gamma}{\alpha}$$

gemacht wird.

Hiernach sagen an sich auch die absoluten Werthe von μ_0 nichts über die Brechungsquotienten an der Sonnenoberfläche aus, sie könnten nach Umständen auch kleiner als 1 werden, ohne zu physikalischen Widersprüchen zu führen. Dagegen aber spricht der Umstand, dass die Werthe von μ_0 so verschieden

von einander sind, so entschieden, als es der Genauigkeit der Beobachtung entspricht, dafür, dass eine ziemlich bedeutende Dispersion in der Sonnenatmosphäre stattfindet. Dieser Schluss ist freilich wesentlich darauf gegründet, dass die Beobachtungen im Roth und Gelb einerseits und in den übrigen Spectralfarben andererseits nicht durch nahe dieselben Werthe von μ darstellbar sind und man wird natürlich diese Folgerung, da sie sich nur auf die Beobachtungen eines Beobachters und eines Instrumentes stützt, nur mit grosser Reserve aussprechen können.

Wenn nun die Sonnenatmosphäre wirklich so bedeutende Dispersionen zeigt, wie die oben angeführten Zahlen andeuten, so muss zunächst der Widerspruch beseitigt werden, der darin liegt, dass die in verschiedenen Farben gemessenen Sonnendurchmesser nicht jene enorme Differenzen aufweisen, wie hieraus zu folgen scheint. Nach der früheren Notiz ist die Vergrösserung des scheinbaren Durchmessers der Sonne σ proportional mit $(\mu_0 - 1)$ und zufolge der obigen Werthe wäre diese Vergrösserung so gross, dass sie auch ganz rohen Messungen nicht hätte verborgen bleiben können, auch solchen nicht, die mit keineswegs monochromatischen Blendgläsern ausgeführt worden sind. Man darf, obwohl diese Verhältnisse, deren Untersuchung genug des Interessanten darbietet, nicht ausreichende Beobachtung gefunden haben, doch mit ziemlicher Sicherheit behaupten, dass die Verschiedenheit der in verschiedenen Farben gemessenen Durchmesser nicht grösser als vielleicht 0.2 beträgt, wenigstens sind die von Herrn Auwers¹⁾ neuerdings ausgeführten Messungen kaum mit grösseren Abweichungen zu vereinigen. Es ist aber leicht einzusehen, wie man beide Thatsachen in Uebereinstimmung bringen kann.

Nach den gefundenen Werthen für ν ist, wie schon bemerkt, die Absorption, welche die Sonnenatmosphäre ausübt,

1) Astron. Nachr. No. 2935.

und für zwei verschiedene Farben

$$\lambda_0 - \lambda_1 = (\alpha_0 - \alpha_1) \left[\frac{7}{4\beta} - \frac{1}{2} \right]$$

Es wird demnach $\alpha_0 - \alpha_1$ und demzufolge auch die Differenz der Brechungsquotienten für zwei verschiedene Farben nur dann nicht von derselben Grössenordnung wie $\lambda_0 - \lambda_1$ werden, wenn β sehr klein ist und dies ist nach der ersten Gleichung für λ nicht möglich, weil λ klein, nämlich einige Hundertstel ist.

Wenn sich auch der Gegenstand nicht weit genug verfolgen lässt, so scheinen sich doch interessante Ausblicke zu eröffnen und es wäre sehr wünschenswerth, wenn solche Beobachtungsreihen, wie sie Herr Vogel geliefert hat, wiederholt und mit der grössten erreichbaren Genauigkeit ausgeführt werden möchten.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner
Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1891.

Wahlen.

Von der mathematisch-physikalischen Classe wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

zum ordentlichen Mitgliede:

Herr Dr. Ludwig Boltzmann, k. k. österr. Hofrath und Professor der theoretischen Physik an der Universität zu München;

zum auswärtigen Mitgliede:

das bisherige correspondirende Mitglied Herr Dr. Ernst Haeckel, Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie an der Universität zu Jena;

zu correspondirenden Mitgliedern:

Herr Dr. Eduard van Beneden, Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie an der Universität zu Lüttich;

Herr Dr. Giovanni Capellini, Professor der Geologie und Paläontologie an der Universität zu Bologna.

Sitzung vom 5. Dezember 1891.

1. Herr L. v. SEIDEL überreicht eine Abhandlung des correspondierenden Mitgliedes, Leo Königsberger in Heidelberg: „über die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme.“

2. Herr W. v. GÖMBEL legt seine Publikation: „Vierte Abhandlung der geognostischen Beschreibung von Bayern (Fränkischer Jura) in fünf Kartenblättern und einem Textband mit einer Uebersichtskarte“ mit einigen erläuternden Bemerkungen vor.

3. Derselbe übergibt sodann eine von dem auswärtigen Mitgliede, Professor Dr. F. v. Sandberger in Würzburg eingeschickte Abhandlung: „über die Erzgänge der Gegend von Freudenstadt und Bulach im Württembergischen Schwarzwalde.“

Ueber die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme.

Von Leo Königsberger in Heidelberg.

(Eingelaufen 7. November.)

Ich erlaube mir im Folgenden einige Sätze bezüglich der Irreductibilität partieller Differentialgleichungssysteme mitzutheilen, deren ausführliche Darlegung nächstens im „Journal für Mathematik“ erscheinen wird.

Eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die sich bekanntlich stets auf die Form bringen lässt

$$(1) \quad \frac{\partial G \left(x_1, x_2, \dots, x_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, t_1 \right)}{\partial t_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ = G_1 \left(x_1, x_2, \dots, x_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, t_1 \right),$$

worin G und G_1 ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen und t_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen

$$x_1, x_2, \dots, x_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$$

algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(2) \quad G \left(x_1, x_2, \dots, x_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, t \right) = 0$$

ist, soll irreductibel genannt werden, wenn kein ~~es~~ ihrer Integrale das Element eines Integralsystems ~~es~~ irgend eines Systems algebraischer partieller Differentialgleichungen mit beliebig vielen abhängigen ~~n~~ und nur $\mu - 1$ der unabhängigen Variabeln z_1, z_2, \dots, z_μ bildet, oder, was dasselbe ist, wenn keines ihrer Integrale eine algebraische partielle Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit nur $\mu - 1$ der unabhängigen Variabeln befriedigt.

Eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln ist also irreductibel, wenn sie mit keiner gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung ein Integral gemein hat.

Man zeigt dann leicht,

dass eine irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer anderen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, aber niederen Grades¹⁾ nie ein Integral gemein haben kann, dass aber, wenn dieselbe mit einem partiellen Differentialgleichungssystem höherer Klasse²⁾ oder derselben (ersten) Klasse, aber höheren oder desselben Grades ein Integral gemein hat, dann auch sämtliche Integrale der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung Elemente von Integralsystemen des partiellen Differentialgleichungssystems bilden werden,

und daraus wieder unmittelbar,

1) Der Grad der partiellen Differentialgleichung wird durch den Grad der Gleichung (2) in Bezug auf t definirt.

2) Die Klasse eines partiellen Differentialgleichungssystems wird durch die Anzahl der abhängigen Variabeln bestimmt.

dass, wenn eine irreductible partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer algebraischen partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung ein Integral gemein hat, sie alle Integrale mit derselben gemein haben, also selbst ein algebraisches Integral der letzteren sein muss.

Die angeführten Sätze führen nun mit einigen Modificationen auf die allgemeine Irreducibilitätsdefinition und die dieser entspringenden Sätze für beliebige partielle Differentialgleichungssysteme.

Sei das partielle Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse den m abhängigen Variabeln $u_1, u_2, \dots u_m$ und den μ unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_\mu$ vorgelegt

$$3) \quad \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = G_1 \\ \frac{\partial G}{\partial t_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = G_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial G}{\partial t_1} \frac{\partial u_m}{\partial x_1} = G_m, \end{cases}$$

in $G_1, G_2, \dots G_m$ ganze Functionen der Grössen

$$\dots x_1, x_2, \dots x_\mu, u_1, u_2, \dots u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_\mu}, \dots \frac{\partial u_m}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial u_m}{\partial x_\mu}, t_1,$$

1 t_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen (α) algebraisch irreductiblen Gleichung

$$G\left(x_1, x_2, \dots x_\mu, u_1, u_2, \dots u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_\mu}, \dots \frac{\partial u_m}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial u_m}{\partial x_\mu}, t\right) = 0$$

so soll dasselbe ein **irreductibles** genannt werden, wenn kein System von 1, 2, 3, \dots oder $m - 1$ Integralelementen $u_1, u_2, \dots u_{m-1}$ wiederum 1, 2, 3, \dots oder $m - 1$ Elemente eines Integralsystems eines

partiellen Differentialgleichungssystems beliebiger Klasse und beliebigen Grades bildet, in welchem die nach z_1 genommenen partiellen Differentialquotienten nur

$\frac{\partial u_1}{\partial z_1}$ oder $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1},$ oder \dots , oder $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, \dots \frac{\partial u_n}{\partial z_1}$ enthalten sind, oder welches die Form hat

(5) {

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = v_1$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial z_1} = v_2$$
$$\dots \dots \dots$$
$$\frac{\partial u_k}{\partial z_1} = v_k$$

$$\psi_{k+1} \left(z_1, z_2, \dots z_\mu, u_1, u_2, \dots u_k, v_1, v_2, \dots v_k, v_{k+1}, \dots \right.$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial v_{k+\epsilon}}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \dots \frac{\partial v_{k+\epsilon}}{\partial z_\mu}$$
$$\dots \dots \dots$$

$$\psi_{k+\epsilon} \left(z_1, z_2, \dots z_\mu, u_1, u_2, \dots u_k, v_1, v_2, \dots v_k, v_{k+1}, \dots v_{k+\epsilon} \right.$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial v_1}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial v_{k+\epsilon}}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \dots \frac{\partial v_{k+\epsilon}}{\partial z_\mu}$$

worin k eine der Zahlen $1, 2, \dots m-1$ bedeute und $\psi_1, \dots \psi_{k+\epsilon}$ algebraische Functionen der geschlossenen Grössen sind.

Mit Hülfe dieser Definition lässt sich nun der Hauptsatz der Irreductibilität folgendermassen aussprechen:

Wenn ein Integralsystem des irreduciblen Differentialgleichungssystems (3) einen Theiler hat, so ist es ein Element oder alle Elemente eines Integrals

des algebraischen partiellen Differentialgleichungssystems höherer Klasse oder derselben Klasse, aber höheren Grades

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial \tau_1} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = H_1, \\ \frac{\partial H}{\partial \tau_1} \frac{\partial u_2}{\partial z_1} = H_2 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial H}{\partial \tau_1} \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_1} = H_\lambda \end{array} \right.$$

bildet, worin $H_1, H_2, \dots H_\lambda$ ganze Functionen der Grössen

$$(\beta) \dots z_1, z_2, \dots z_\mu, u_1, u_2, \dots u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \dots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau_1,$$

und τ_1 eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen (β) algebraisch irreducibeln Gleichung

$$(7) \quad H \left(z_1, z_2, \dots z_\mu, u_1, u_2, \dots u_\lambda, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \dots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_2}, \dots \frac{\partial u_\lambda}{\partial z_\mu}, \tau \right) = 0$$

ist, so werden alle Integralsysteme von (3) das Differentialgleichungssystem (6) befriedigen.



Gruppe grösstentheils verdeckt und tritt erst am Südrande des Odenwaldes bei Heidelberg wieder an die Oberfläche.

Bezüglich der Gliederung des Buntsandsteins mag einstweilen bemerkt werden, dass ich keine Veranlassung habe, von meiner früheren Auffassung derselben abzugehen. Hier- nach folgen von unten nach oben

- | | | |
|----------------------------|---|--|
| Unterer Buntsandstein. | { | <p>1. Heller, oft ganz weisser Sandstein mit zahlreichen Feldspath-Bröckchen und Flecken von Mangan- oxyden und Brauneisenstein (Tigersandstein), zuweilen, namentlich nach oben reich an Porphyr-, aber auch Quarz-Geröllen, stellenweise Conglomerat-Bänke bildend (Rossbühl, Bahnhof Teinach).</p> <p>2. Rothgefärbte thonige, oft plattenförmige Sand- steine nach oben von gröberem Korne, reich an Kaolin- Bröckchen und gewöhnlich auch an infiltrirter Quarz- substanz, zu oberst mit einer oder mehreren Conglomerat- Bänken, in welchen Gerölle von weissem Quarze und verschiedenfarbigen harten Quarzsandsteinen vorherrschen. Kieselsandstein (Sandb.). Mittlerer Buntsandstein (Eck). Ueberall verbreitet.</p> |
| Mittlerer Buntsand- stein. | { | <p>3. Bläulicher oder violeter Sandstein mit dolomi- tischen Putzen und Carneol-Schnüren, nur an einzelnen Orten gut aufgeschlossen, z. B. am Kienberg bei Freuden- stadt, Kniebis beim Gasthaus zum Lamm 942,32 m. Elmen bei Baiersbronn 899,20 m. Rossberg 800 m. Wildberg bei Calw, Durlach u. s. w.</p> |
| Oberer Buntsandstein | { | <p>4. Thoniger, meist dunkelrother Sandstein, nach oben in dünnplattige, glimmerreiche Lagen übergehend (Lossburg, Rodt, Wittlensweiler, Neu-Bulach u. a. O.)</p> <p>5. Rother Schieferthon (Röth), ebenfalls nicht überall gut aufgeschlossen, aber oft sehr deutlich, wie in den Eisenbahn-Einschnitten bei Freudenstadt, Calw, Pforzheim und Durlach.</p> |

Rücksicht auf die chemische Beschaffenheit derselben folgen zu lassen.¹⁾

Der Tigersandstein ist stets licht gefärbt und namentlich in der tiefsten Region reich an Flecken von Mangan- und Eisenoxiden, welche ich schon 1861 als Reste manganhaltiger Braunspathe erkannt hatte.²⁾ In den Bohrlöchern zu Teinach³⁾ war dieses Bindemittel noch vollständig erhalten vorgefunden worden, es ist das Material, aus welchem durch Einwirkung der in den Wassern des darüber lagernden Sandsteins reichlich vorhandenen Kieselsäure die Kohlensäure entwickelt wird, welche den Teinacher Quellen den Charakter von Sauerlingen verleiht. Aber nicht bloss unter Tag lässt sich das nachweisen, sondern wenigstens ebenso schön auch in dem erst seit dem Bau der württembergischen Schwarzwaldbahn freigelegten grobkörnigen Sandstein am Bahnhof Teinach, 342 m ü. M., also ungefähr in demselben Niveau, in welchem die Wiesenquelle in Teinach erbohrt wurde. Hier steht ein zwar nicht gefleckter, aber durch sein grobes Korn und seinen Reichthum an Feldspath-Trümmern, wie durch sein Niveau noch deutlich als zu derselben unteren Abtheilung des Buntsandsteins, wie der Tigersandstein, gehörig erkennbarer Sandstein zu Tage an, dessen Bindemittel (20,37 proc.) durchweg aus lichtem etwas bittererdehaltigem Kalkspath⁴⁾ besteht, welcher sich in Salzsäure unter starkem Brausen auflöst. Eckige Gerölle von Quarz-Porphyr, bis 0,04 m lang und 0,03 m breit, herrschen in seinen Conglomerat-Bänken

1) Bezüglich der in dem Schlümmrückstande der sämtlichen Sandsteine enthaltenen Mineralien mag bemerkt werden, dass in ihnen mikroskopischer Zirkon und Turmalin, sowie Magnetkies niemals fehlen, zuweilen ist auch Rutil in geringer Menge vorhanden.

2) Geolog. Beschreib. der Gegend von Baden S. 19.

3) Regelmann, Quellwasser Württembergs S. 36.

4) 16,13 Ca OCO², 4,10 Mg OCO² und 0,34 Ca O SO³.

geschehen ist. Sie schliessen mit Bänken von grobem, vorwiegend aus Geröllen von weissem Quarze und verschiedenfarbigen harten Quarzsandsteinen gebildetem Conglomerat nach oben ab. Nur der in Berührung mit den Erzgängen im grossen Steinbruche an der Christophsaue bei Freudenstadt aufgeschlossene Theil dieser Gruppe wird später genauer zu schildern sein.

Ebensowenig geben die Aufschlüsse in der mittleren carneolführenden Schichten-Gruppe hier zu weiterer Besprechung Veranlassung. Die oberen rothen thonigen Sandsteine, unten regelmässig in Quader und oben in glimmerreiche Platten abgesondert, sind über das ganze Plateau verbreitet und bilden bei Neu-Bulach das unmittelbare Nebengestein des dortigen Ganges; soweit bis jetzt bekannt, enthalten sie ausser Eisen und wenig Mangan keine Schwermetalle. Diese Gesteine zeigen im Gebiete des südwestdeutschen Buntsandstein-Zuges eine ausserordentlich grosse Beständigkeit in petrographischer und chemischer Beziehung, so dass es mir nicht möglich sein würde, Handstücke von Lossburg, Neu-Bulach und Durlach von solchen aus dem badischen Odenwalde oder Franken zu unterscheiden. Auch die Analysen zeigen höchstens Schwankungen im Kieselsäuregehalt, d. h. in der Menge des Quarzsandes.¹⁾ Die Leitpflanzen, *Anomopteris Mougeoti* und *Equisetum Mougeoti*, sind ebenfalls von Villingen bis Durlach an einzelnen Orten, namentlich bei Nagold²⁾ beobachtet.

Ebenso verhält es sich auch mit dem rothen Schieferthone, dem Röth, dessen petrographische Beschaffenheit und durch sie bedingte Undurchlässigkeit für Wasser ihm in dem

1) Vergl. die Analysen des oberen Buntsandsteins von Neubürg von Wolff (Württemb. Jahresh. XXIII. S. 84 und von Erlabrunn und Thüngersheim bei Würzburg von Hilger (Mitth. a. d. pharmac. Institute und Laboratorium f. angew. Chemie zu Erlangen I. S. 140 ff.)

2) Begleitworte zu Blatt Calw S. 9.

Seite des Nagoldthales mächtiger entwickelt. Kleine abgerissene Ablagerungen auf der linken, wie bei Neu-Bulach, beweisen, dass das ganze Plateau von Freudenstadt an nördlich bis gegen Pforzheim von ihnen überdeckt war, aber sehr starke Abschwemmungen erfahren hat. Der Kupfergehalt dieser Bänke ist schon lange bekannt¹⁾. eine genauere chemische Untersuchung derselben hat niemals stattgefunden, wurde aber für die vorliegende Arbeit nothwendig. Das Material habe ich bereits im Jahre 1886 an Ort und Stelle gesammelt und 1891 zweckentsprechend ergänzt. Hierbei ergab sich, dass nur die in dem oben angegebenen Profile angeführten versteinungsleeren unteren Dolomit-Bänke Kupfer, Arsen, Antimon, Wismuth, Kobalt und Silber enthalten, wie sich bei Verwendung von 20—22 grm. auf das Deutlichste herausstellt, und es ist nun an der Zeit, diese eingehender zu besprechen.

Die unterste Dolomitbank ist fast nur in Eisenbahneinschnitten im unverwitterten Zustande zu treffen, sie stellt dann einen schwarzgrauen, fast dichten Dolomit dar, welcher seine Färbung einem reichlichen Gehalte an Bitumen verdankt. Gewöhnlich ist er aber in Folge der Verwitterung bereits in ein gelbgraues, äusserst feinkörniges Gestein umgewandelt, wie z. B. in den Profilen bei Aach, Wittlensweiler, Nagold, an der Signalthöhe zwischen Neu- und Alt-Bulach u. s. w.

Was zunächst die chemische Zusammensetzung²⁾ betrifft, so liegen ältere Analysen I—IV von Wellendolomit vor, dessen Niveau nicht bestimmt wurde, Analyse V bezieht sich aber auf die zweitunterste Bank von Grünthal bei Freudenstadt.

1) v. Alberti Monographie 1834 S. 37, 39, 41.

2) Der Schlammrückstand des Wellendolomits enthält nur sehr wenig mikroskopischen Zirkon und Turmalin, sowie Magnetkies und seine Bestandtheile haben daher keinen Einfluss auf das Resultat der Analysen.

gewitterten Varietäten war aber kein metallglänzender Körper mehr zu entdecken. Vermuthlich ist das Erz hier schon in die später zu besprechenden gelben erdigen Massen umgewandelt. Der geringe Schwefelsäuregehalt des Gesteins würde ebenfalls dafür sprechen, wie spätere Beobachtungen über die Zersetzungs-Producte des Fahlerzes darthun werden. Der Schlämmrückstand des mit Salzsäure behandelten Gesteins bestand überwiegend aus Quarzsplittern. Ausblühungen von Salzen schwerer und edler Metalle wurden an der untersten Bank nicht beobachtet, sondern lediglich sehr dünne, dunkelschwarze Ueberzüge von Wad auf den Kluftflächen, auf welchen nicht selten Gruppen von Kalkspath-Rhomboedern oder solche von wasserhellen Aragonit-Nadeln aufsitzen. Zu Neu-Bulach sind auf Klüftchen auch Aggregate kleiner durch Bitumen schwarzgefärbter Quarzkrystalle vorgekommen. Das kohlensaure Manganoxydul, welches zweifellos dem frischen Dolomit als isomorpher Bestandtheil angehört, in den Analysen der verwitternden Gesteine aber als Oxydhydrat angegeben wird, ist daher zuerst als Hyperoxyd abgeschieden worden, wo auf den Klüften des Gesteins lufthaltige Wasser eingedrungen waren und gleichzeitig wurde auch ein Theil des kohlensauren Kalks gelöst und als reiner Kalkspath, bezw. Aragonit wieder abgesetzt.

Was die zweitunterste Bank des Wellendolomits betrifft, so ist sie nicht fein-, sondern mittelkörnig, im frischen Zustande, wie z. B. in den Eisenbahn-Einschnitten, dann in den Brüchen bei Grünthal und Glatten bei Freudenstadt tief schwarzgrau und so hart, dass sie, abgesehen von dem Gebrauche als „schwarzer“, d. h. hydraulischer Kalk auch als Strassenmaterial benützt werden kann, z. B. auf der Strasse von Freudenstadt nach Dietersweiler. Sehr gewöhnlich enthält sie kleine Bitterspath-Drusen, in welchen Gruppen sehr kleiner Fahlerz-Kryställchen aufsitzen, welche dieselben Elemente enthalten, die oben aus dem untersten Wellendolomit angeführt

oberen Murgthale ein Fahlerz und Kupferwismuthglanz führender Gang auf. Derselbe wurde urkundlich 1598, 1623, 1787 und zuletzt als Johann-Friedrichsgrube 1823—25 bebaut und führte, nach den s. Z. von dem Revierbeamten Eisenlohr zu Freudenstadt gesammelten Stücken zu schliessen, Fahlerz von derselben Zusammensetzung wie das der Freudenstadter und Bulacher Gänge, jedoch mit etwas höherem Antimon- und geringerem Kobaltgehalte. Der mit vorgekommene Wismuthkupferglanz wird in vielen Schriften irrig als „Nadelerz“ bezeichnet, er enthält aber keine Spur Blei, sondern ausser Kupfer und Wismuth nur sehr wenig Antimon.

Innerhalb des ursprünglich überall von Wellendolomit bedeckten Buntsandstein-Gebietes und nur in diesem treten nun Schwerspath-Gänge da auf, wo sich Verwerfungs-Spalten gebildet haben. Sie zeigen sich, wo ersterer nicht abgeschwemmt worden ist, noch in dem Wellendolomit selbst, wie bei Wittlensweiler, Aach und Glatten, gewöhnlich aber in dem durch Erosion des letzteren und des Röths entblösten Buntsandstein. Wie tief sie hinabreichen, ist nicht sicher zu ermitteln.

Da die Verhältnisse nicht überall die gleichen sind, so erscheint es nützlich, die Gang-Gruppen um Freudenstadt und Neu-Bulach zunächst getrennt zu behandeln, obwohl ihre Ausfüllung nicht verschieden ist.

I. Die Erzgänge der Gegend von Freudenstadt.

Zu dieser Gruppe gehören die in unmittelbarer Nähe von Freudenstadt in Friedrichsthal, an der Christophsaue und bei Wittlensweiler, Aach, Hallwangen und Glatten auftretenden Gänge, welche seiner Zeit von dem verstorbenen Hüttenverwalter Eisenlohr aufgenommen wurden und auch auf dem Blatte Freudenstadt der geognostischen Specialkarte

6. Plattenförmiger roth und weiss gestreifter Sandstein	0,2 m
7. Harter gelber Sandstein ohne Gerölle . . .	3,5 ,
8. Kaolinführender Sandstein ¹⁾ mit Geröllen, zu oberst förmliche Conglomerat-Bank . . .	4,0 ,
9. Plattenförmiger Sandstein, oben mit Wellenfurchen	1,7 ,
	<hr/> 25,7 m

Etwas über der Mitte des Bruchs nach Süden zu tritt die erste schmale Gangkluft mit 70° Einfallen nach SSW auf, dann folgt eine zweite breitere mit gleichem Einfallen, die dritte unter gleichem Winkel, aber nach N fallende, ist schon 1 m breit, aber erst von der vierten, gleichfalls 1 m breiten, mit Schwerspath und Erzen (Fahlerz und wenig Kupferkies, sehr selten auch Kupferwismuthglanz (Emplektit)) ausgefüllten an senken sich die Schichten stark nach Süden und liegt z. B. die obere Conglomerat-Bank nur wenig über der oberen Sohle des Steinbruchs. Der fünfte Gang von gleicher Mächtigkeit und gleicher Ausfüllung ist jetzt leider durch das in den Bruch hineingebaute Hotel Waldeck fast ganz verdeckt.

Was die Struktur der Gänge betrifft, so sind Salbänder niemals und Absonderung in Lagen nur selten erkennbar. Drusen sind nicht häufig mit Schwerspath oder Eisenspath-Krystallen, vielmehr gewöhnlich mit Quarz ausgekleidet, auf welchen dann Ueberzüge von Brauneisenstein und Kupfermanganerz folgen. Die Klüfte in der Nähe von reichlicher eingewachsenem Fahlerz erscheinen gewöhnlich mit Zersetzungsproducten desselben, namentlich Mixit, seltener auch Würfelerz und Olivenit bedeckt. Das Nebengestein zwischen den Gängen ist stets vollkommen verkieselt und zwar durch

1) Enthält ein wenig kohlensauren Baryt, wie auch andere Bunt-sandsteine. Unters. über Erzgänge II. S. 355 f.

I. 1. Verkieselter Sandstein. 2. Fahlerz $\left(+\frac{O}{2} \cdot \infty O\right)$,
z. Th. von grossblättrigem Schwerspath I. umhüllt.

II. 1. Wie bei I. 2. derbes Fahlerz, hier und da mit Kupferkies verwachsen.

III. 1. Wie bei I u. II. 2. Schwerspath mit eingewachsenem Fahlerz. 3. Eisenspath in Rhomboedern, stellenweise schon stark verwittert und in dichten Brauneisenstein umgewandelt.

IV. 1. Schwerspath, zahlreiche Putzen von Fahlerz in verschiedenen Zersetzungsstufen und von erdigem Rotheisenstein umschliessend. 2. Mixit in zahlreichen strahligen Büscheln.

V. 1. Schwerspath mit stark zersetztem, in gelbliche pulverige Massen umgewandeltem Fahlerz. 2. Quarz II $(\infty R \cdot + R)$. 3. Würfelerz in sehr klein. Krystallen $\left(\infty O \infty \cdot + \frac{O}{2}\right)$.

VI. 1. Grobblättriger Schwerspath, oben mit Krystallen bedeckt, welche mit Quarzkryställchen überzogen und z. Th. schon Pseudomorphosen sind. In Drusen: 2. kugeliger Erinit und 3. krystallisirter Olivenit.

VII. 1. Brauneisenstein. 2. in Drusen: Würfelerz $\left(\infty O \infty \cdot \frac{O}{2}\right)$. 3. Schaliges Kupfermanganerz (Rödter Weg).

VIII. 1. Schwerspath mit 2. Brauneisenstein-Schnüren, welche meist in Hydrohämatit umgewandelt sind (Christophsthal).

IX. 1. Verkieselter Sandstein. 2. Quarz II $(\infty R \cdot + R)$. 3. Schaliger Brauneisenstein. 4. Schaliges Kupfermanganerz.

X. 1. Wie bei IX. 2. Quarz II $(\infty R \cdot + R)$. 3. Schaliger Brauneisenstein. 4. Kupfermanganerz in kleintraubigen Gruppen. 5. Schwerspath II, weisse Tafeln.

XI. 1. Schwerspath I. 2. Kupfermanganerz. 3. Kleintraubiger Chalcedon (Friedrichsthal).

Der Bergbau bei Freudenstadt ist sehr alt und würde wohl die an zahllosen Stellen unternommenen Versuche reich-

auftretende Gang, welcher in quarzreichem Schwerspath und Quarz eingesprengtes Fahlerz führt, ist schon an der Mündung des alten oberen, jetzt anderweitig benutzten Stollens der Grube „Himmlisches Heer“ noch gut erkennbar. Er setzt, in zwei Trümer getheilt, welche sich im Inneren des Stollens zu einem 1 m mächtigen Gangkörper vereinigen, in verkieseltem Buntsandstein auf. Hier hat, wie die bis zum Bache herabgehenden mächtigen Schachthalden beweisen, ein ziemlich bedeutender Bergbau stattgefunden, die Erze enthielten nach einer 1723 ausgeführten Probe im Centner 15 Pfund Kupfer und 10 Loth Silber. Auch diese Grube wurde wegen zu geringer Ergiebigkeit¹⁾ schon im vorigen Jahrhundert verlassen. Auf den Halden findet man noch einzelne Gangstückchen mit frischem und zersetztem Fahlerz, Mixit, Wad, Malachit, Brauneisenstein und Kupfermanganerz von ganz gleicher Beschaffenheit wie zu Christophsaue. Der Wellendolomit steht in ganz geringer Entfernung von dem Gange, aber nicht unmittelbar neben ihm an, in den gleichfalls ganz nahe liegenden Hauptmuschelkalk setzt die Spalte nicht herauf und auch in der nahe gelegenen grossartigen Verwerfungsspalte bei Schopfloch hat sich meines Wissens weder Schwerspath noch Erz gezeigt, sie ist offenbar weit jünger als unsere Gangspalten.

II. Die Gänge von Neu-Bulach unweit Calw.

Das vortrefflich ausgeführte Blatt Calw der geognostischen Specialkarte von Württemberg bringt die Lage derselben im Buntsandstein zwischen zwei ehemals zweifellos zusammenhängenden Schollen von Wellendolomit sehr klar zur Anschauung, während die Schilderung der Mineral-Vorkommen im Texte viel zu wünschen übrig lässt. Ich habe diese schon

1) „Weil es in der Teufe schlecht aussah.“

III. 1. Verkieselter plattenförmiger Sandstein, reich an Glimmerblättchen. 2. Fahlerz. 3. Quarz II ($\infty R \cdot \pm R$). 4. Kupferlasur in strahligen Gruppen. 4. Schwerspath II, wie bei II.

IV. 1. Wie bei III. 2. Weisser blätteriger Schwerspath I, stellenweise zersetztes Fahlerz umhüllend. 3. Quarz II ($\infty R \cdot \pm R$). 4. Kupferlasur in kleinen Kugeln.

V. 1. Sandstein wie bei III und IV. 2. Fahlerz, nach oben zersetzt. 3. Kupferlasur, krystallisirt wie bei II., nach oben mit Erhaltung der Form in Malachit umgewandelt.

VI. 1. Wie bei III–V. 2. Quarz II. 3. Arseniosiderit in kleintraubigen Ueberzügen. 4. Malachit, feinstrahlig in kleinkugeligen Krusten.

VII. 1. Wie oben. 2. Quarz II. 3. Brauneisenstein. 4. Kupfermanganerz.

Der Bergbau ist uralt und wird schon 1322 in Urkunden erwähnt. Er wurde meist mit geringer Ausbeute bis in das dritte Jahrzehnt dieses Jahrhunderts betrieben. Auch bestand eine Zeitlang eine Silberhütte, welche im Teinach-Thale an dem Platze gelegen war, welchen jetzt die Gebäude des Badhotels einnehmen. Der Hüttenprocess war jedenfalls sehr mangelhaft, da für Erz-Proben aus dem Jahre 1596 nur 8 Pfund Kupfer, zugleich aber bis 4 Loth Silber im Centner angegeben werden, während die Analyse des reinen Fahlerzes in 100 Theilen 41,28 Kupfer und nur Spuren von Silber aufweist. Das liesse sich nur erklären, wenn einmal ausser Fahlerz local ächte Silbererze eingebrochen wären. Allerdings schwankt wohl auch sonst der Silbergehalt von Fahlerzen auf demselben Gange, aber so kupferarme, wie sie die Erzprobe anzunehmen veranlassen würde, sind wohl kaum bekannt.

Von den ehemaligen Grubengebäuden waren zwei Stollen die bedeutendsten. Der erste, Ziegelbach-Stollen genannt, war von Seitzenthal bis zum Himmelfahrtsschachte am

Städtchen von SO nach NW herangedrungen und 500 Lachter lang. Zusammengebrochene Reste desselben sind noch jetzt über Tag deutlich sichtbar. Der zweite, angeblich ebenfalls 500 Lachter lang, erstreckte sich von dem erwähnten Schachte aus unter dem Städtchen durch gegen Liebelsberg. Kleine Versuchsbaue bei Schmieh, Martinsmoos und Sonnenhardt wurden bald aufgegeben. Im Jahre 1883 wurden die zuletzt noch einmal 1820 vom Staate betriebenen und dann ins Freie gegebenen Gruben von der badischen Anilin- und Soda-Fabrik in Ludwigshafen gemuthet, aber nicht in Betrieb gesetzt. Die mit dünnen Anflügen von Kupferlasur, Malachit und Kupfermanganerz bedeckten Gangstückchen, welche noch jetzt in Menge auf den Halden liegen, müssten zunächst aus sehr grossen Massen des metallleeren Nebengesteins ausgesucht werden, was sehr kostspielig sein würde. Ob sie auch bei sorgfältigster Verarbeitung mittelst des Cement-Verfahrens oder galvanischer Ausfällung einen Gewinn abwerfen würden, ist mir sehr zweifelhaft.

— — — — —

III. Die Mineralien der Gänge.

1. Fahlerz (Wismuth-Fahlerz)¹⁾, zweifellos das technisch werthvollste und auch wissenschaftlich interessanteste Mineral der Gänge, kommt meist in Körnern bis zu Wallnuss-Grösse vor, muss aber nach Stücken in alten Sammlungen zu schliessen, zuweilen auch in kopfgrossen Nestern eingebrochen sein, welche meist an quarzige Gangart gebunden waren. Dasselbe erscheint, wenn krystallisirt, stets in der einfachen Form $\frac{0}{2} \cdot \infty()$. selten noch mit $\frac{202}{2}$ combinirt, besitzt starken, aber etwas zum Fettglanz geneigten Metall-

¹⁾ Sandberger, Jahrb. f. Mineral. 1864 S. 223. 1865 S. 584 ff. Th. Petersen, das. 1870 S. 464 f.

glanz, dunkel stahlgraue Farbe und graulichschwarzen Strich. Das specifische Gewicht betrug bei der Varietät von Freudenstadt 4,90, bei jener von Neu-Bulach 4,908. Ein höheres specifisches Gewicht zeigen nur noch hoch silber- und quecksilberhaltige Fahlerze. Das Löthrohrverhalten ist bei beiden nahezu das gleiche. Auf Kohle erhält man im Oxydations-Feuer Dämpfe von arseniger und antimoniger Säure, sowie einen strohgelben Beschlag von Wismuthoxyd, welcher sich mit Jodkalium feuerroth färbt. Setzt man Soda zu und arbeitet mit der Reductions-Flamme, so kann man durch Einschmelzen der magnetischen Schlacke, welche das silberhaltige Kupferkorn umgibt, in eine Boraxperle das Kobalt leicht nachweisen. Die qualitative Analyse auf nassem Wege führt ausserdem zur Entdeckung kleiner Mengen von Nickel, Zink und Blei.

Die quantitativen Analysen ergaben:

	Freudenstadt (Hilger.)	Neu-Bulach (R. Senfter.)
Schwefel	26,40	24,85
Arsen	6,98	13,53
Antimon	14,72	4,28
Wismuth	4,55	6,33
Silber	1,37	Spur
Kupfer	33,83	41,43
Eisen	6,40	3,74
Kobalt (nebst Spur Nickel)	4,21	Spur
Zink	0,00	3,82
Blei	0,00	1,52
	<hr/> 98,46	<hr/> 99,50

Bekanntlich gehören Analysen von Fahlerzen zu den schwierigsten, es darf daher nicht verwundern, dass beide Analysen, wie so viele andere, einen etwas geringeren Schwefelgehalt ergeben, als die ideale Formel der Fahlerze $4RS \cdot R^2S^3$ verlangt. Höchst merkwürdig ist, dass die Erze von Freudenstadt und Neu-Bulach trotz aller sonstigen Uebereinstimmung doch auch wesentliche Verschiedenheiten in dem

raume in Lösung zu bleiben und zuletzt durch kohlensauren Kalk in Kupferlasur und Malachit umgesetzt zu werden, welche zu den jüngsten Absätzen auf demselben gehören. Nur einmal traf ich eine förmliche Pseudomorphose von Kupferindig nach Fahlerz¹⁾, in welcher daher die Substanz auf der ersten Zersetzungsstufe stehen geblieben war. In der Regel folgt alsbald die Bildung schmutzig olivengrüner poröser Massen, aus arsensaurem, vielleicht auch theilweise antimonsaurem Kupferoxyd, arsensaurem Kupfer-Wismuthoxyd (Mixit), basisch schwefelsaurem und arsensaurem Eisenoxyd und Kobaltoxydul, sowie schwefelsaurem Antimonoxyd und basisch schwefelsaurem Wismuthoxyd bestehend. Wie bekannt zersetzt sich die Antimon-Verbindung leicht in Antimonoxyd und freie Säure und auch die des Wismuths erfährt, wenn auch weniger rasch, die gleiche Umwandlung. Die arsensauren Kupferverbindungen scheiden sich aus der zersetzten Masse nur selten in kleinen Mengen als Erinit und Olivenit aus, dagegen häufig mit Wismuth zusammen als Mixit, das Eisen als basisch arsensaures Oxyd in Form von Würfelerz. Je mehr von diesen Körpern aus dem Gemenge ausgetreten sind, desto mehr geht die Farbe des erdigen Restes in schmutzig gelbgrau und zuletzt in strohgelb über, womit eine ständige Anreicherung an Antimon und Wismuth verbunden ist, so dass das Gemenge schon bei grünlichgrauer Färbung neben beträchtlichen Mengen von Antimonocker und Stiblit²⁾ einen Wismuth-Gehalt von 5,5 proc. zeigt, der Gehalt an Schwefelsäure ist aber auf 0,55 herabgesunken. Wiederholte Versuche, die einzelnen Bestandtheile des erdigen Gemenges durch Schlämmen zu trennen, blieben resultatlos, auch unter dem Mikroskope bildet

1) Jahrb. f. Min. 1866 S. 201.

2) Beide Körper müssen deshalb in dem Gemenge vorhanden sein, weil sich ein Theil der antimonhaltigen Substanz sofort und leicht in Salzsäure löst, der Rest aber erst nach längerem Kochen aufgenommen wird.

r Zersetzungs-Rest nur eine einfarbige Masse. Die verschiedenen Mineralien, welche direkt aus dem Fahlerze hergehen, werden später einzeln besprochen werden.

Ein übersichtliches Bild des Zersetzungs-Processes gewährt die folgende 1865 entworfene Tabelle. Das Vorkommen des Lixits ist erst in neuerer Zeit constatirt worden.

1) Bei der Zersetzung der Antimon- und Wismuthsalze durch Wasser frei geworden.

2. Kupferwismuthglanz (Emplektit). Das Vorkommen dieses Minerals in dünnen stark gefurchten Säulchen auf dem östlichsten Gange bei Freudenstadt hatte ich bereits 1864 bemerkt, aber nicht genügendes Material für quantitative Analysen gewinnen können. Erst später erhielt ich von Herrn Hüttenverwalter Eisenlohr ein Stückchen Quarz mit derbem Erze aus dem Christophstollen, welches dazu ausreichte. Herr Dr. Petersen¹⁾ fand darin

Schwefel	19,06
Wismuth	59,09
Kupfer	20,82
Eisen	0,40
Antimon und Arsen .	Spur
	<hr/>
	98,87

Die Uebereinstimmung mit der Formel $Cu^2S \cdot Bi^2S^3$ ist nahezu vollständig. Das Erz verwittert und zeigt dann zunächst einen grünen aus Kupfer- und Wismuth-Verbindungen bestehenden Ueberzug. Auch in Neu-Bulach kommt dieses Erz vor, aber bisher nur in mit Erhaltung der Form bereits völlig umgewandelten Nadeln, welche ganz aus Malachit bestehen und mit Arseniosiderit überzogen sind. Die Menge dieses Erzes ist zu gering, um eine technische Verwerthung zu gestatten.

3. Kupferkies. Die Seltenheit dieses sonst häufigen Erzes auf den hier besprochenen Erzgängen ist für dieselben bezeichnend. Erbsengrosse Körner finden sich, stets von überwiegendem Fahlerz begleitet, nur an wenigen Freudenstadter und noch seltener an Neu-Bulacher Gangstücken.

4. Eisenspath. Das Mineral ist zwar recht häufig, mir aber in ganz frischem Zustande niemals zu Gesicht gekommen. Sattelförmige, in manganhaltigen Brauneisenstein umgewandelte Rhomboeder bis zu Haselnussgrösse finden sich häufig

1) Jahrb. f. Min. 1869 S. 847.

kommt zuweilen in deutlichen Pseudomorphosen nach aufgewachsenen Krystallen desselben vor. Sie dringt in alle Klüftchen des Schwerspaths ein und erscheint hier ebenso wie in den Drusen stets in Krystallen der Form $\infty R \cdot \pm R$, die von Senfkorngrösse bis zu mehreren Centimetern vorkommen. In der Regel ist dieser Quarz, der besonders reichlich und schön im nordwestlichen Theile des Neu-Bulacher Ganges auftritt, völlig farblos, nur selten einmal durch Brauneisenstein dunkel gefärbt.¹⁾ Juxtapositions-Zwillinge kommen nicht selten vor. Die Erze sind älter als der zweite Quarz, die secundären Substanzen aber jünger, da sie erst über ihm auftreten.

7. Chalcedon in milchblauen ebenen oder kleintraubigen Ueberzügen ist bisher nur in geringer Menge über Kupfermanganerz und Schwerspath I im Friedrichsthale beobachtet worden.

a. Zersetzungsproducte des Fahlerzes.

8. Erinit. Dieses äusserst seltene Mineral ist von mir erst im letzten Sommer in hoch-spangrünen kleintraubigen Ueberzügen mit schaliger Structur auf Quarz II aufsitzend und z. Th. von Olivenit bedeckt bei Freudenstadt aufgefunden worden. Es gleicht zunächst täuschend gleichgestalteten Aggregaten von Malachit, braust aber natürlich nicht mit Salzsäure und entwickelt auf Kohle reichlich Arsendampf. Mit Haidingers Beschreibung²⁾ stimmt die Substanz vollkommen überein. Die von den genauesten Kennern³⁾ britischer Mineralien geäusserte Ansicht, dass der ursprüngliche Fundort nicht in

1) Also selbstverständlich kein Rauchtöpas, dessen Färbung bekanntlich durch organische Substanz bedingt ist.

2) *Annals of Philosophy* 1828. IV. p. 154.

3) *Greg and Lettson Manual of the Mineralogy of Great Britain and Ireland* p. 320.

habe kein Stück mehr auf den Halden finden können. Es wird hier unmittelbar von Kupferlasur bedeckt. Das Würfelerz ist an vielen Orten als Zersetzungsproduct arsenhaltiger Fahlerze bekannt, besonders schön und reichlich aus Cornwall und von Langenborn bei Schöllkrippen im Spessart.

12. Kobaltblüthe. Ist früher in erdigen Parthien (sog. Kobaltbeschlag) auf dem östlichsten Gange der Christophsane vorgekommen, in neuerer Zeit habe ich sie nicht mehr beobachtet. In ausgezeichneter Weise findet sie sich auf dem Fahlerz von Kaulsdorf bei Säälfeld, wie ich bereits früher bemerkt habe.¹⁾

13. Rotheisenocker. Erdiger hochgefärbter Rotheisenstein tritt zu Freudenstadt nicht selten im Gemenge mit den letzten Zersetzungsproducten des Fahlerzes, d. h. Wismuthoxyd und antimoniger Säure, seltener in selbständigen Nestern und in der Regel neben reichlichen Ausscheidungen von Mixit auf. Würfelerz fehlt dann völlig. Ich vermuthe, dass an solchen Stellen die Arsensäure vollständig zur Bildung des Kupfer-Wismuth-Arseniats verbraucht worden ist und daher keine mehr zur Bildung von Eisen-Arseniat verfügbar war. Auch an anderen Orten kommen diese Ausscheidungen von Eisenoxyd aus zersetzten Fahlerzen öfter vor; die rothen, so leicht auf chemischem Wege bestimmbar sind, weil auch in Salpetersäure unlöslich, zuweilen für Zinnober gehalten worden.

14. Kupferlasur. Gehört zu den Zierden des Neu-Bulacher Ganges und ist noch jetzt, wenngleich nicht in guten Stücken auf den Halden häufig, bei Freudenstadt aber niemals vorgekommen. Die Kupferlasur tritt bei Neu-Bulach zuweilen in strahlig-blätterigen Kugeln von WallnussgröÙe, meist aber in dicken krystallinischen Ueberzügen auf, an

1) Jahrb. f. Min. 1865 S. 591.

wärtig trifft man ihn noch theils in dicken Ueberzügen mit faseriger Structur und glatter glänzender Oberfläche (Glaskopf) oder in dünnen erdigen von licht brauner Farbe, nicht selten auch in rhomboedrischen Pseudomorphosen. In manchen derben Massen ist ebenso wie in den Pseudomorphosen noch Manganhypoxyd beigemengt, falls es nicht theilweise schon früher, also unter demselben als Wad ausgeschieden worden ist, die Hauptmasse des Mangans tritt aber erst in dem den Brauneisenstein überdeckenden Kupfermanganerz concentrirt auf.

17. Hydrohämätit.¹⁾ Ist genau in ebensolchen Ueberzügen und Trümmern wie der Brauneisenstein nicht selten, aber von diesem durch dunkel kirschrothen Strich und weit geringeren Wassergehalt leicht zu unterscheiden. Bekanntlich verliert merkwürdiger Weise Eisenoxydhydrat, welches längere Zeit unter Wasser verweilt, das vorher in chemischer Verbindung aufgenommene Wasser und wird wasserfrei. Dieser Process, in welchem der Hydrohämätit ein mittleres Stadium repräsentirt, muss in der Natur oft in sehr grossem Massstabe vor sich gegangen sein, wie z. B. auf den Gängen von Irrgang bei Platten in Böhmen, Ilfeld am Harze u. a. O., denn jeder sog. rothe Glaskopf ist ja nur Pseudomorphose nach braunem.

18. Wad. Dünne schwärzliche Ueberzüge auf Sandstein zeigen bräunlichen Strich und entwickeln mit Salzsäure viel Chlorgas. Die Lösung enthält kein Kupfer. Das Mineral kommt zu Freudenstadt, Hallwangen und Neu-Bulach, aber nirgends in grösserer Menge vor und erscheint ebenso wie auf den Klüften des Wellendolomits häufig von Malachit oder Kupferlasur bedeckt.

1) Breithaupt, Vollständ. Handbuch d. Mineralogie 1847 S. 846.

Varietät stets enthalten, fehlt aber in jener von Neu-Bulach, was sich aus den oben mitgetheilten Analysen der Fahlerze von beiden Fundorten leicht erklärt. Schon bei anderen Gelegenheiten¹⁾ habe ich darauf hingewiesen, dass dieser Körper aus der Zersetzung von Malachit durch Manganlösungen hervorgeht. Auch an Stücken von Freudenstadt und Neu-Bulach ist das sehr deutlich nachweisbar. Noch jünger sind auf den Gängen nur die wasserhelle zweite Schwerspath-Generation und der ebenso spärlich vorkommende Chalcedon.

Soviel über die Mineralien der Erzgänge.

Bildungsweise der Erzgänge.

Wie schon früher entwickelt wurde, sind alle Erz- ~~und~~ Schwerspath-Gänge der hier besprochenen Gegend Ausfüllungen von Verwerfungs-Spalten, welche von dem unteren Wellendolomit bis in den untersten Buntsandstein hinabreichen, ob auch noch in das Grundgebirge ist noch nicht entschieden, da man meines Wissens nicht unter den tiefen Christophstollen hinabgegangen ist, wäre aber möglich. Es fragt sich nun, woher rührt das Material der Gänge und da stellt sich zunächst heraus, dass es nur aus dem Wellendolomit und zwar aus den untersten Bänken desselben entnommen sein kann. Die Buntsandstein-Schichten enthalten die Elemente der Gangmineralien nicht, wie zahlreiche Versuche mit aller Bestimmtheit nachgewiesen haben. Es handelt sich also, wie ich schon früher²⁾ gezeigt habe, um Ausfüllung der Gangspalten von oben, um „Descensions-Gänge“. Früher wurde bereits nachgewiesen, dass der Wellendolomit nicht nur die Elemente eines kalk- und manganhaltigen Eisenspathes, sondern auch fertiggebildetes, aber sehr feinvertheiltes Fahlerz

1) Unters. über Erzgänge I S. 123. Diese Sitzungsber. 1891. S. 203.

2) Unters. über Erzgänge II. S. 244.

erz ist vermuthlich durch verdünnte Lösungen von Schwefelcalcium oder Schwefelnatrium ausgelaugt und in gleicher Form wieder abgesetzt worden. Was den Schwerspath betrifft, so ist seine Löslichkeit in verschiedenen Flüssigkeiten, z. B. salpetersaurem Ammoniak bei gewöhnlicher Temperatur längst bekannt. In neuester Zeit hat Lattermann¹⁾ nachgewiesen, dass er auch in Soolwassern gelöst auftritt und aus diesen erst bei starker Verdünnung und zwar nicht vollständig ausfällt.²⁾ Dass der Wellendolomit nach seinem Absatze aus dem Meere noch längere Zeit Salzlösungen in sich zurückgehalten habe, wie sie in der Lautenthaler Soole vorliegen, darf wohl um so weniger als gewagte Annahme bezeichnet werden, als derselbe noch jetzt an destillirtes Wasser sowohl durch Wasser auslaugbare Chlorverbindungen als schwefelsaure Salze in nicht ganz unbedeutender Menge abgibt und bei Sulz am Neckar sogar Soole aus ihm austritt.³⁾ Kohlensaures Eisen- und Manganoxydul ist zwar nicht in der Lautenthaler, wohl aber in einer Soole aus einem Bohrloche im Zwickauer Kohlenbecken⁴⁾ neben kohlensaurem Kalke, Chlorbaryum und Chlorstrontium nachgewiesen worden, das Auftreten von manganhaltigem Eisenspath neben Schwerspath auf den Gängen hat also nichts Befremdendes. Auch in den Kissinger u. a. Sool-Quellen ist Baryt neben Carbonaten in sehr geringer Menge enthalten.

Soweit die Gänge im Wellendolomit auftreten, erscheinen

1) Jahrb. d. k. preuss. geol. Landesanstalt 1888. S. 271 ff.

2) Ders. das. S. 278. Proben der prächtigen Röhrenstalaktiten von Schwerspath, welche sich aus dieser Soole in der Grube zu Lautenthal in gleicher Art wie sonst Kalksinter noch absetzen, habe ich durch die Güte des Herrn Bergraths Banizza erhalten und selbst untersuchen können.

3) v. Alberti, Ueberblick über die Trias S. 6. Eine Analyse dieser Soole habe ich leider nicht finden können.

4) Karsten, Journ. f. prakt. Chemie Bd. XXXV. S. 257.

hat Nichts an die Gänge abgegeben, wiederholte Untersuchungen haben in demselben kein Kupfer, sondern nur minimale Quantitäten von Arsen und Kalk nachgewiesen. Selbstverständlich wurde nur solches untersucht, in welches keine von den Gängen auslaufenden Trümer hereinsetzen. Mit der massenhaften Infiltration von Kieselsäure erscheint die Ausfüllung der Gänge beendet.

Natürlich waren diese nach der allgemeinen Erosion des Buntsandsteingebietes schliesslich der Einwirkung lufthaltiger Wasser preisgegeben. Alsdann begann der Process der Zersetzung des Fahlerzes sowie des Eisenspaths, welcher im Inneren des Gebirges wohl bis auf den heutigen Tag noch fort dauert und aller Wahrscheinlichkeit nach sehr langsam verläuft. Die obere Teufe der Gänge, welche nur Zersetzungsproducte, namentlich oft prächtig gefärbte Kupfersalze aufweist, ist natürlich ganz anders beschaffen, als die tieferen Regionen, in welchen noch frische Schwefelmetalle und kohlen-saure Salze erhalten geblieben sind. Sehr interessant ist das Auftreten des jüngeren Schwerspaths über den Oxydations-Producten in der oberen Teufe, ich möchte in ihm eine Bestätigung der Beobachtung von Lattermann erblicken, nach welcher sich schwefelsaurer Baryt in verdünnten Flüssigkeiten lange gelöst erhält, was ja auch durch Versuche im Laboratorium vollkommen bestätigt wird.

Soviel über meine Untersuchungen an den merkwürdigen Descensions-Gängen des württembergischen Schwarzwaldes, welche meine früher¹⁾ ausgesprochene Ansicht von der Natur derselben bis in die kleinsten Einzelheiten bestätigen.

1) Unters. über Erzgänge II. S. 244 f.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1891.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten. — Die zunächst für die philos.-philol. u. histor. Classe bestimmten Druckschriften sind in deren Sitzungsberichten 1891 Heft V verzeichnet.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions, Vol. XIV. part 1. 1891. 8^o.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandlingen. Natuurkunde. Bd. 28. 1890. 4^o.

Peabody Institute in Baltimore:

24th annual Report June 4. 1891. 8^o.

Johns Hopkins University in Baltimore:

American Journal of Mathematics. Vol. XIII. 3. 4. 1891. 4^o.

American Chemical Journal. Vol. XIII. 2—6. 1891. 8^o.

K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië in Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 50. 1891. 8^o.

K. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke. Bd. VII. 1891. 4^o.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 24. Jahrg. Nr. 12—18. 1891. 8^o.

1891. Math.-phys. Cl. 3.

320 *Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften.*

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 43. Heft 1. 2. 1891. 8^o.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. 1891. Bd. 5 Nr. 6—17. 8^o.
Verhandlungen. 1891. Nr. 15. 16.

K. Geodätisches Institut in Berlin:

Jahresbericht für 1890/91. 8^o.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XX. Heft 3. 1891. 8^o.

K. Sternwarte in Berlin:

Beobachtungs-Ergebnisse. Heft 5. 1891. 4^o.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in Berlin:

Verzeichniss der Mitglieder. 1891. 8^o.
Gartenflora. 40. Jahrgang. 1891. 8^o.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. 1891. Nr. 27—31. 33—52. — 1892 Nr. 1. 4^o.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 11. Jahrg. Heft 7—12. 1891. gr. 8^o.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen aus dem Jahre 1890. Nr. 1244—1264. 1891. 8^o.

Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Bd. XXX, 2. Bd. XXXI. Basel. 1890. 4^o.
Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft zu
Davos 1890, nebst französ. Uebersetzung. Davos 1891. 8^o.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:

Exposé des raisons appuyant la transaction proposée par l'Académie
des sciences de Bologne au sujet du méridien initial. Rome
1890. 8^o.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 48. Jahrg. 1. Hälfte. 1891. 8^o.

Société de Géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin 1891. Nr. 13—22. 8°.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Mémoires. 3^e Sér. tome 5. cahier 2. et Appendice au tome V. 1890. 8°.

Boston Society of natural history in Boston:

Proceedings. Vol. XXV part I. 1891. 8°.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:

6. Jahresbericht für die Jahre 1887/88 u. 1888/89. 1891. 8°.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Collection in 8°. Tom. X. Fasc. 4. 1891. 8°.
Bulletin. IV. Sér. tom. V. Nr. 6—10. 1891. 8°.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Évkönyve. Bd. IX, 6. 1891. gr. 8°.
Földtani Közlöny. Bd. XX, 5—7. 1890. Bd. XXI, 4—9. 1891. 8°.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. Entrega 17. (= tom. III. entr. 5). 1891. Fol.

Oficina meteorológica Argentina in Buenos Aires:

Anales. Tom. VIII. 1890. 4°.

Revista Argentina de historia natural in Buenos Aires:

Revista. Vol. I. Nr. 4. 5. 1891. 8°.

Institut météorologique de Roumanie in Bukarest:

Analele. Tom. IV. 1888. 1891. 4°.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:

Anales. Seccion II. año 1890. 1891. Fol.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. Année 1890. 4 Ser. Vol. 5. Fasc. 2. 3. 4. 1891. 8°.
Bulletin météorologique, Mai—Decembre. 1890. 8°.

Government of India in Calcutta:

Scientific Results of the second Yarkand Mission. Aves, by R. Bowdler Sharpe, with Introductory Note and Map 1878—1891. London 1891. Fol.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Indian Meteorological Memoirs. Vol. IV, part 7. 1891. Fol.
 Report on the Administration in 1890/91. 1891. Fol.
 Monthly Weather Review. 1891 Jan.—April. Fol.
 Registers of original Observations. 1891 Jan.—April. Fol.
 Cyclone Memoirs. Vol. IV. 1891. gr. 8^o.

Agricultural Department of the Government of India in Calcutta:

Memorandum on the snowfall in the mountain districts. 1891. Fol.

Indian Museum in Calcutta:

Catalogue of Mammalia in the Indian Museum by W. L. Sclater. Part II
 1891. 8^o.

Geological Survey Office in Calcutta:

Records of the geological Survey of India. Vol. XXIV. Nr. 1—3 und
 Register zu I—XX. 1891. 4^o.
 Memoirs. Vol. XXIV. Nr. 3. 1890. 4^o.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VII, part IV. V. 1891. 8^o.

Museum of comparative Zoölogy at Harvard College in Cambridge U. S.:

Bulletin. Vol. XXI. Nr. 2—5. Bulletin Vol. XVI. Nr. 10. 1891. 8^o.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bulletino mensile. 1891 Fasc. 20—22. 8^o.

K. Sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch. VII. Jahrg. 1889. II. Hälfte.
 VIII. Jahrg. 1890. I. u. II. Hälfte. 1891. 4^o.

Universität in Christiania:

Ethnografisk Kart over Tromsø Amt. 6. Bl. 1890.

K. Universität in Christiania:

Archiv for Mathematik. Bd. XIV. 3. 4. 1890. 8^o.
 Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 32, 1. 2. 1890. 8^o.
 Schubeler, Tillaeg til Viridarium I. 1891. 8^o.

K. Universitäts-Sternwarte in Christiania:

Magnetische Beobachtungen 1882—1883 von H. Geelmuyden. 1891. 4^o.
 Supplement zu den Zonenbeobachtungen in Christiania v. H. Geel-
 muyden. 1891. 4^o.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. 34. Jahrg. 1889/90. 1891. 8°.

The Journal of comparative Neurology in Cincinnati:

Journal. Vol. I. pag. 107—286. 1891. 8°.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung. 1891 Nr. 47—100. Fol.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. VII. Heft 4. 1891. 8°.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tom. VI. Livr. 3. 4. Tom. VII. Livr. 1. Leiden 1891. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Dorpat:

Meteorologische Beobachtungen in d. Jahren 1884 u. 1885 v. Karl
Weihrauch. 1891. 8°.

Sitzungsberichte. Bd. IX, 2. 1891. 8°.

Schriften. Nr. VI. 1890. 4°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XI. Juillet—Déc. 1890. 8°.

Royal Dublin Society in Dublin:

The scientific Proceedings. Vol. 6. part 10. Vol. 7. part 1. 2. 1890/91. 8°.

The scientific Transactions. Vol. IV. part 6—8. 1890/91. 4°.

Royal Observatory in Edinburg:

Catalogue of the Crawford Library. 1890. 4°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Ser. Vol. XIV. disp. 2. 3. 1891. 8°.

Monitore Zoologico Italiano in Florenz:

Monitore. 2° anno 1891. Nr. 2. 4—10. 8°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M.:

Abhandlungen. Bd. XVI. Heft 3. 4. 1891. 4°.

Bericht. 1891. 8°.

Physikalischer Verein in Frankfurt a. M.:

Jahresbericht für 1889—90. 1891. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:

Helios. Monatliche Mittheilungen. 8. Jahrg. 1890 Nr. 8--12. 9. Jahrg. 1891 Nr. 1--6. 8^o.

Societatum Litterae 4. Jahrg. 1890. Nr. 9--12. 5. Jahrg. 1891. Nr. 1--8. 8^o.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. B.:

Berichte. Bd. V. Heft 1. 2. 1890--91. 8^o.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Tom. XXXI. part. 1. 1890 - 91. 4^o.

Sternwarte in Genf:

Résumé météorologique de l'année 1890. 1891. 8^o.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz.

Mittheilungen. XXVII. Vereinsjahr 1890. 1891. 8^o.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1890. Heft 27. 1891. 8^o.

Niederl. Regierung im Haag:

Nederlandsch Kruidkundig Archief. II. Ser. Vol. V. Stuk 4. Nijmegen 1891. 8^o.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

Proceedings and Transactions. Vol. VII. part. IV. 1890. 8^o.

Kaiserlich Leopoldino-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft XXVII. Nr. 9--22. 1891. 4^o.

Nova Acta. Tom. 54. 1890. 4^o.

C. F. Zincken, Das Vorkommen der natürlichen Kohlenwasserstoff- und der andern Erdgase. 1890. 4^o.

Geschichte der kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher von Willi Ule. 1889. 4^o.

Naturw. Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 63. Heft 6. Bd. 64, Heft 1--3. 1890/91. 8^o.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:

Verhandlungen. Bd. VII. 1891. 8^o.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen. Bd. XI. 2. 3. 1891. 4^o.

Musée Teyler in Harlem:

Archives. Sér. II. Vol. III. Fasc. 6. 1891. 4^o.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:

Archives Néerlandaises. Vol. XXV. livr. 2. 3. 4. 1891. 8^o.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

No. 16 et 17 de la Carte géologique de la Finlande accompagnés de renseignements. 1891.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 49. 50. 1890—91. 8^o.

Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors:

Meddelanden. Heft 16. 1888—91. 8^o.

Acta. Vol. VII. 1890. 8^o.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Bd. XXIII. Heft 3. 1891. 8^o.

Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 18. Jahrg. 1891. 8^o.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. 19. Jahrg. 1889/90 u. 1890/91. 1891. 8^o.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 22. Heft 3. 4. Bd. 26. Heft 1. 2. 1891. 8^o.

Central-Bureau für Meteorologie in Karlsruhe:

Jahresbericht für 1890. 1891. 4^o.

Verein für Naturkunde in Kassel:

36. u. 37. Bericht über die Vereinsjahre 1889 und 1890. 1891. 8^o.

Ministerial-Kommission zur Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Ergebnisse der Beobachtungs-Stationen. Jahrg. 1890 Nr. 1—12. Berlin 1891. 4^o.

Naturwissenschaftlicher Verein in Kiel:

Schriften. Bd. IX, 1. 1891. 8^o.

Arztlicher naturwissenschaftlicher Verein Klausenburg:

5 Hefte der Zeitschrift *Értesitő*. 1891. 8°.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 31. Jahrg. Jubiläumsband 1890. 1891. 4°.

Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Skifter. 6. Raekke. Naturvid. Afd. Bd. VI. Nr. 2. 1890—91. 4°.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. Vol. 27. Nr. 104. 1891. 8°.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Teil X. Heft 3. 4. 1891. 8°.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. 26. Jahrg. Heft 2. 3. 1891. 8°.

K. K. Mathematische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Berichte. Mathem.-phys. Classe. 1891, II. 8°.

Abhandlungen. Mathem.-phys. Classe. Bd. XVII, 5. 6. XVIII, 1.
1891. 4°.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal N. F. Bd. 44. Heft 13—24. 1891. 8°.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd. I. 1891. 8°.

K. K. Bergakademie Leoben:

Programm f. d. Studienjahr 1891/92. 1891. 8°.

University of Nebraska in Lincoln:

Bulletin of the agricultural experiment station of Nebraska. Nr. 17.
1891. 8°.

Museum Francisco-Carolineum in Linz:

Beiträge zur Rosenflora v. J. B. Wiesbaur und Michael Haselberger.
1891. 8°.

Materialien zur landenkundlichen Bibliographie Oberösterreichs von
Hans Commenda. 1891. 8°.

Zeitschrift „La Cellule“ in Loewen:

La Cellule. Tom. VII. Fasc. 1. 1891. 4^o.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Nature. Vol. 44. Nr. 1127—48. Vol. 45. Nr. 1149—1155. 1891. gr. 8^o.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 49. Nr. 300—302. 1891. 8^o.

Philosophical Transactions. Vol. 181. part. I. II. 1891. 4^o.

List of Members 1890. 4^o.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 51. Nr. 8. 9. Vol. 52. Nr. 1. 1891. 8^o.

Chemical Society in London:

Proceedings. Session 1891—92. Nr. 96—103. 8^o.

Journal. Nr. 344—349. July—December 1891. 8^o.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 47, part 1—4. 1891. 8^o.

Linnean Society in London:

The Journal. a. Zoology. Nr. 124. 125. 145—147.

b. Botany Nr. 175. 183—193. 1890/91. 8^o.

The Transactions. a. Zoology. Vol. 5. part 5—7.

b. Botany. Vol. 3. part 2. 3. 1891. 4^o.

List of the Members. 1890—1891. 8^o.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1891. Part 4—6. 8^o.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1891. Part II. III. 8^o.

Transactions. Vol. XIII. part 3. 1891. 4^o.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. XVIII. Livr. 1. 1891. 8^o.

The Governor in Council in Madras:

Results of Observations of the fixed stars made at the Observatory
Madras in the years 1868—1870, by N. R. Pogson. 1890. 4^o.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht u. Abhandlungen 1890. 1891. 8^o.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere in Mailand:
Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. 10. 1891. 8^o.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:
Boletin mensual. Tom. III. Nr. 1. 2. 1891. 4^o.

Sociedad Mexicana de historia natural in Mexico:
La Naturaleza. II. Sér. Tom. 1. Nr. 10. 1891. Fol.

Societat científica Antonio Alzate in Mexico:
Memorias y revista tom. IV. Nr. 9. 10. 1891. 8^o.

Società dei naturalisti in Modena:
Atti. Serie III. Vol. X. Fasc. 1. 1891. 8^o.

Royal Society of Canada in Montreal:
Proceedings and Transactions. Vol. VIII. 1890. 1891. 4.

Geological Survey of Canada in Montreal:
Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. I, part III. Nr. 5.
1891. 8^o.

Société impériale des naturalistes in Moskau:
Bulletin. 1891. Nr. 1. 8^o.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Correspondenzblatt. 1891. Nr. 2—9. München. 4^o.

Technische Hochschule in München:
Personalstand. Som.-Sem. 1891.
Programm f. d. J. 1881—92. 8^o.
Bericht f. d. Studienjahr 1890—91. 4^o.

K. bayer. Staatsministerium des Innern in München:
Geognost. Jahreshefte. 3. Jahrg. 1890. Cassel. gr. 8^o.
Geognost. Karte des Königr. Bayern. Blatt Ansbach mit Erläuterungen.
Cassel 1891. Fol.

Société des sciences in Nancy:
Bulletin. Sér. II. Tom. X. Fasc. 24. Paris 1891. 8^o.
Bulletin. 1891. Nr. 4—7. Nancy 1891. 8^o.

Reale Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:
Atti. Serie II. Vol. 4. 1891. 4^o.

Museo di Geologia della R. Università in Neapel:

Cinquantesimo anniversario dell' Insegnamento di Arcangelo Scacchi.
1891. gr. 8^o.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. X. Heft 1. Berlin 1891. 8^o.

North of England Institute of Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. XXXVIII. part 6. Vol. XL. part 2. 3. 1891. 8^o.
Annual Report of the Council. 1891. 8^o.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. III. Ser. Vol. 41. Nr. 245. 246. Vol. 42., May—September
1891. gr. 8^o.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VI. Nr. 1. 1891. 8^c.

Journal of comparative medicine and veterinary archives in New-York:

Journal. Vol. XII. Nr. 6. 8—12. 1891. 8^o.

American Museum of natural history in New-York:

Annual Report for 1890—1891. 1891. 8^o.

American chemical Society in New-York:

Journal. Vol. XIII. Nr. 5—8. 1891. 8^o.

American Geographical Society in New-York.

Bulletin. Vol. XXIII. Nr. 2. 3. 1891. 8^o.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Jahresbericht 1890. 1891. 8^o.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Bd. XVI. Heft 1 und Mathem. Abtheilung. Tom. XIII.
1891. 8^o.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Bulletino. Tom. V. Nr. 1. 1891. 8^o.
Atti. Vol. XII. Fasc. 2. 1892. 8^o.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Annata XIV. 1891 Nr. I. 1891. 4^o.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tomo. 5. Fasc. 4. 5. 6. 1891. gr. 8^o.

330 *Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften.*

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1891. Nr. 26—51. 8°.

Académie des Sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 112. Nr. 26. Tom. 113. Nr. 1—26. 1891. 4°.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès verbaux. 1890. 1891. 8°.

École polytechnique in Paris:

Journal. Cahier 60. 1890. 4°.

Zeitschrift „L'Électricien“ in Paris:

L'Électricien. 2^e Sér. Tom. II. Nr. 27—52. 1891. gr. 8°.

Zeitschrift „Le Moniteur scientifique“ in Paris:

Moniteur scientifique. Livr. 596—600. Août—Déc. 1891. gr. 8°.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Nouvelles Archives. III. Sér. Tom. II. Fasc. 2. 1890. 4°.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tom. 1. Fasc. 3. 1890. 8°.

Société de géographie in Paris:

Bulletin. VII. Sér. Tom. XI. Trimestre II. 1891. 8°.
Compte rendu. 1891. Nr. 14—18. 8°.

Société d'Horticulture in Paris:

Journal. Tom XIII. Octobre 1891. 8°.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XIX. Nr. 6. 1891. 8°.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XVI. Nr. 6. 7. 8. 1891. 8°.
Mémoires. Tom. IV. Parties 3 et 4. 1891. 8°.

Comité géologique in St. Petersburg:

G. D. Romanowski. Materialy dlä geologii Turkestanskago Kraja.
Bd. III. 1890. 4°.

*Chemisch-physikalische Gesellschaft an der Kais. Universität in
St. Petersburg:*

Schurnal. Bd. XXIII. Nr. 5—8. 1891. 8^o.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1890. Theil I. 1891. 4^o.

Société Impériale Russe de géographie in St. Petersburg:

Beobachtungen der Russischen Polarstation auf Nowaja Semlja. I.
Theil. 1891. 4^o.

Academy of natural sciences in Philadelphia:

Bacteriological Laboratory. Reprints of three Editorials regarding
the Priority in demonstrating the Toxic Effect of Matter ac-
companying the Tubercle Bacillus. 1890. 8^o.

Proceedings. 1891. Part 1. 8^o.

Alumni Association of Pharmacy in Philadelphia:

27. annual Report for the year 1890—91. 1891. 8^o.

R. Scuola normale superiore in Pisa:

Annali. Vol. XIII. 1890. 8^o.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Vol. VII. p. 235—346. 1891. 4^o.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Bd. XX. Nr. 5. 6. 1891. 8^o.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorologische Beobachtungen im Jahre 1890.
51. Jahrg. 1891. 4^o.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. XXXIV. 1891. 8^o.

Arbeiten. N. F. Heft 7. 1891. 8^o.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Revista. 1891. Nr. 5—10. 8^o.

Esboço de uma climatologia do Brazil por H. Morize. 1891. 8^o.

Accademia Ponteficia de'Nuovi Lincei in Rom:

Memorie. Vol. IV. V. VI. 1888—90. 4^o.

Atti. Anno XLIII. Sessione VII. Anno XLIV. Sessione I—V. 1890
—91. 4^o.

332 *Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften.*

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bolletino 1891. Nr. 1. 2. 3. 8°.

Memorie per servire alla descrizione della carta geologica d'Italia.
Vol. IV. Parte 1. 1891. 8°.

Ministero della istruzione pubblica in Rom:

Le Opere di Galileo Galilei. Vol. II. Firenze. 1891. 4°.

Academy of Science in Saint-Louis:

The total Eclipse of the Sun, Jan. 1. 1889. Cambridge 1891. 4°.

Commissão geographica e geologica do Estado de S. Paulo in S. Paulo:

Boletin. Nr. 4—7. 1890. 8°.

Department of Mines in Sidney:

Records of the Geol. Survey of New-South-Wales. 1890. Vol. II. Part
1—3. 1890. 4°.

Memoirs. Palaeontology. Nr. 5. 1891. Fol.

Annual Report 1890. 1891. Fol.

Royal Society of New-South-Wales in Sidney:

Journal and Proceedings. Vol. XXIV. Part 2. 1890. 8°.

R. Accademia dei Fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV. Vol. III. Fasc. 5—9. 1891. 8°.

Museum in Stavanger:

Aarsberetning for 1890. 1891. 8°.

Société des Sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. 25. Fasc. 6—10. 1891. 8°.

West-Hendon-House Observatory in Sunderland:

Publications. Nr. 1. 1891. 4°.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico):

Boletin. Tom. I. Nr. 3—6. 1891. 4°.

Anuario. Anno de 1892. 1891. 8°.

Royal Society in Tasmania:

Papers and Proceedings for 1890. 1891. 8°.

College of Science, Imperial University in Tokyo (Japan):

Journal. Vol. IV, part 2. 1891. 4°.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. II, part 1. 1891. gr. 8°.

Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten and Wetenschappen in Utrecht:

Die Functionen der Ganglienzellen des Halsmarkes von Otto Kaiser. Haag. 1891.

Institut Royal météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1890. 1891. 4°.

Société provinciale des arts et sciences in Utrecht:

Frank W. Very, Distributions of the Moon's Heat. The Hague 1891. gr. 8°.

Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. IV. Reeks. I, 2. 1891. 8°.

Smithsonian Institution in Washington:

Experiments in Aërodynamics. By S. B. Langley. 1891. 4°.

Miscellaneous Collections. Nr. 708. 741. 764. 594. 663. 785. 1885—1891. 8°.

Annual Report 1889. 1890. 8°.

Plates prepared to accompany a Report on the forest trees of North America by Asa Gray. 1891. Fol.

Chief Signal Officer of the U. S. Army in Washington:

Annual Report for the year 1890. 1890. 8°.

Surgeon General's Office, U. S. Army in Washington:

Index Catalogue. Vol. 12. 1891. 4°.

U. S. Coast and Geodetic Survey Office in Washington:

Bulletin. Nr. 22. 23. 24. 1891. 4°.

Report for the year 1889. 1890. 4°.

Landwirthschaftliche Zentralschule in Weihenstephan:

Jahresbericht für das 39. Schuljahr 1890/91. Freising 1891. 8°.

K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Denkschriften. Mathem.-naturw. Klasse. Bd. 57. 1890—91. 4°.

Sitzungsber. Math.-naturw. Kl. Abth.	I.	1890	Nr. 4—10	} 8°.
		IIa.	1890 „ 4—10	
		IIb.	1890 „ 4—10	
		III.	1890 „ 4—10	

K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien:
Jahrbücher. Jahrg. 1889. Bd. 34. 1890. 4^o.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:
Wiener klinische Wochenschrift. IV. Jahrg. 1891. Nr. 28—40. 42. 44.
47—51. 53. 4^o.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:
Mittheilungen. Bd. XXI. Heft 2. 3. 1891. 4^o.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:
Verhandlungen. Bd. 41. Quartal 1. 2. 1891. 8^o.

K. K. österr. Gradmessungs-Commission in Wien:
Astronomische Arbeiten. Bd. II. 1890. 4^o.
Verhandlungen. Protokoll über die Sitzungen vom 1. April 1890 und
vom 4. April 1891. 1890/91. 8^o.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:
Annalen. Bd. VI. Nr. 2. 1891. gr. 8^o.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:
Jahrbuch. Jahrg. 1890. Bd. 40. Heft 3. 4. Jahrg. 1891. Bd. 41. Heft 1. 4^o.
Verhandlungen 1891. Nr. 8—14. 4^o.

K. K. Universitäts-Bibliothek in Wien:
Pfaff, Rede auf Zeiller. 1891. 8^o.
Lustkandl, Sonnenfels und Kudler. 1891. 8^o.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:
Annalen. Bd. VII. 1891. gr. 4^o.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:
Jahrbücher. Jahrg. 44. 1891. 8^o.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:
Verhandlungen. N. F. Bd. XXV. Nr. 3. 4. 5. 1891. 8^o.
Sitzungsberichte. 1891. Nr. 2. 3. 8^o.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:
Vierteljahrschrift. 35. Jahrg. Heft 3. 4. 36. Jahrg. Heft 1. 1890/91. 8^o.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:
4. Jahresbericht f. d. J. 1890. 1891. 8^o.

— — — — —

Von folgenden Privatpersonen:

Antonio Aloï in Catania:

- Dell' influenza dell' electricità atmosferica sulla vegetazione delle piante. 1891. 8^o.
Sulla traspirazione cuticolare e stomatica delle piante terrestri. Catania 1891. 8^o.

Florentino Ameghino in Buenos Aires:

- Revista Argentina de historia natural. Tom. I. entr. 3. 1891. 8^o.

Rudolf Blasius in Braunschweig:

- Systematische Uebersicht der Vögel Bayerns, von A. J. Jäckel, herausgegeben v. Rud. Blasius. München 1891. 8^o.

Le Dr. Bonnejoy (du Vexin) in Paris:

- Le Végétarisme. Paris 1891. 8^o.

Giovanni Canestrini in Venedig:

- Abbozzo del sistema acarologico. 1891. 8^o.

R. Fresenius in Wiesbaden:

- Chemische Untersuchung der Trink- oder Bergquelle des Bades Bertrich. 1891. 8^o.
Analyse des Julianenbrunnens u. d. Georgenbrunnens im fürstl. Bade Eilsen. 1891. 8^o.

Konrad Ganzenmüller in Dresden:

- Kura Kavar. Ukerewe Njansa. Weimar 1891. 8^o.

S. P. Langley in Paris:

- Recherches expérimentales aérodynamiques. 1891. 4^o.

Émilie Lemoine in Paris:

- Contributions à la géométrie du triangle. 1889. 8^o.
Sur les triangles orthologiques. 1890. 8^o.

Max Kolb in München:

- Die europäischen und überseeischen Alpenpflanzen. Lief. 1—8. Stuttgart. 1889. 8^o.

A. Kurz in Augsburg:

- 5 Abhandlungen. Sep.-Abdr. aus d. Repert. d. Physik:
1. Zwei Apparate zum Rollen und Gleiten auf der schiefen Ebene.
II. Mittheilung. 2. Elementare Darstellung des Regenbogens.
1891. Math.-phys. Cl. 3.

3. Die gewöhnliche Linse und der Achromatismus. III. Mittheilung. 4. Die Elasticität der Coconfäden. 5. Stroboskopische Demonstrationen.

Der Arbeitsbegriff in der Elektrik. S.-A. aus den Blättern für das bayer. Realschulwesen.

Das Augsburger Wetterhäuschen. S.-A. aus d. Augsburger Sonntagsblatt 1891 Nr. 11 u. 21.

Die thermische u. mechanische Ausdehnung des Kautschuks. II. Mittheilung. 1891. 8°.

Ferdinand v. Müller in Melbourne:

Iconography of Australian Salsolaceous Plants. Decade I—VII. 1889/90. 4°.

O. A. L. Pihl in Christiania:

The Stellar Cluster χ Persei. 1891. 4°.

Michèle Rajna in Venedig:

Sulle eclissi solari del 6 Giugno 1891 e del 16 Aprile 1893. 1891. 8°.

Karl von Scherzer in Genua:

Der wirthschaftliche Verkehr der Gegenwart. Wien. 1891. 8°.

Fürst Grigori Stourdza in Paris:

Les lois fondamentales de l'univers. 1891. gr. 8°.

Agostino Todaro in Palermo:

Hortus botanicus Panormitanus. Tom. II. Fasc. 5. 1891. Fol.

Henry Wilde in London:

On the causes of the Phenomena of terrestrial Magnetism. 1891. 4°.

Robert Winkler in Nürnberg:

Ein neues Weltssystem. 1891. 8°.

Namen-Register.

- van Beneden** Eduard (Wahl) 273.
Boltzmann Ludwig (Wahl) 273.
Brill Alexander 207.

Capellini Giovanni (Wahl) 273.

Dyck Walther 23.

Finsterwalder Sebastian 180.

v. Gümbel Wilhelm 79. 274.

Haeckel Ernst (Wahl) 273.
v. Haerdtl Eduard 189.
Hébert Eduard (Nekrolog) 146.
Henneberg Wilhelm (Nekrolog) 161.
Hessler Franz (Nekrolog) 139.

Königsberger Leo 275.

Lommel Eugen 181.

Recknagel Georg 5.
Rüdinger Nikolaus 121.

v. Sandberger Friedrich 191. 281.
Seeliger Hugo 239. 247.
Steinheil Adolf 1.

v. Tschichatscheff Peter (Nekrolog) 175.

v. Voit Carl 139. 189.
Voss Aurel 59.

Weber C. Ludwig 59.
Will Heinrich (Nekrolog) 154.

Sach-Register.

Bilder, erzeugt von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes, auf Grund der Seidel'schen Formeln untersucht 180.

Curvensysteme, über die gestaltlichen Verhältnisse derselben, definirt durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln 23.

Differentialvarianten, speziell in der Flächentheorie 59.

Druckschriften, eingelaufene 221. 319.

Erzgang der Grube Sagra Familia in Costarica 191.

Erzgänge der Gegend von Freudenstadt und Bulach im württembergischen Schwarzwald. 281.

Extinction des Lichtes in der Atmosphäre 247.

Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle 207.

Geognostische Beschreibung von Bayern 274.

Glykogenbildung, nach Aufnahme verschiedener Zuckerarten 189.

Inklination, Messung der magnetischen 59.

Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme 275.

Lieberkühn'sche Drüsen, Umbildung derselben durch die Solitär-follikel im Wurmfortsatz des Menschen 121.

Nekrologe 139. 146. 154. 161. 175.

Optik, Handbuch der angewandten 1.

Problem der drei Körper, Skizzen zu einem speziellen Fall desselben 189.

Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes 181.

Strahlenbrechung in der Atmosphäre 239.

Thermen von Bormio, geologische Bemerkungen über dieselben 79.

Wahlen 273.

Wohnung, zur Hygiene derselben 5.

Fig. 1.

G_3

.....BABY

Fig. I

.3

УВАЖАЮ! ОБОЖАЮ!

Fig. II.'

G₁

BRARY

2

1

Y9A981 0907MA10

Fig. II.'

G₁

BRAY

G₂

2

1

YSA 991 090799

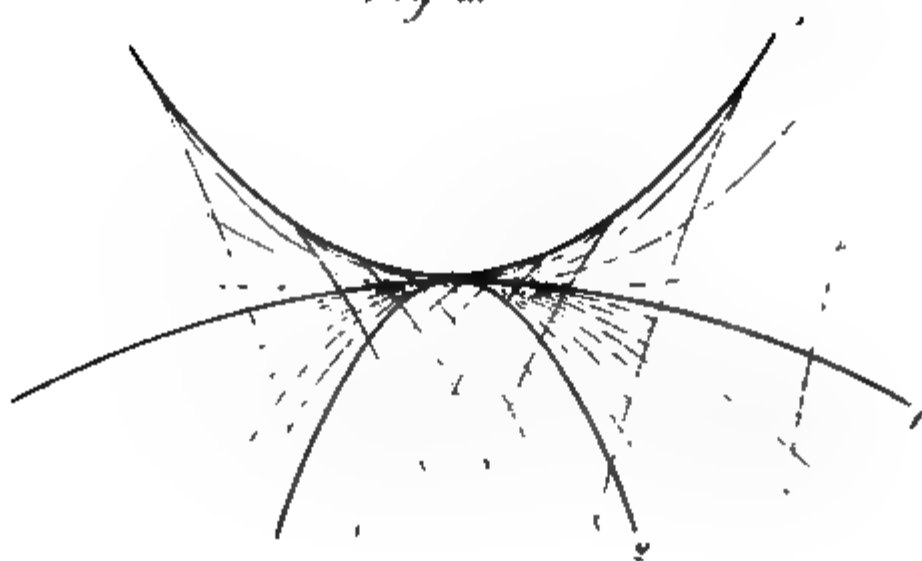
Fig. III.

1

BY

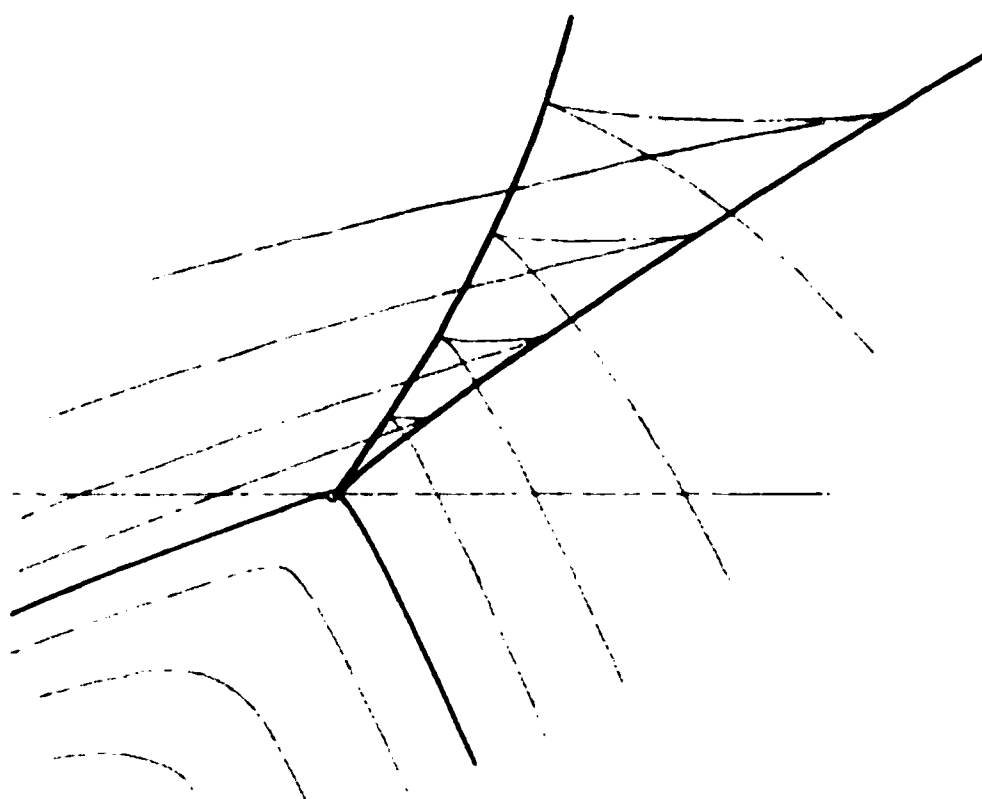
62

Fig III



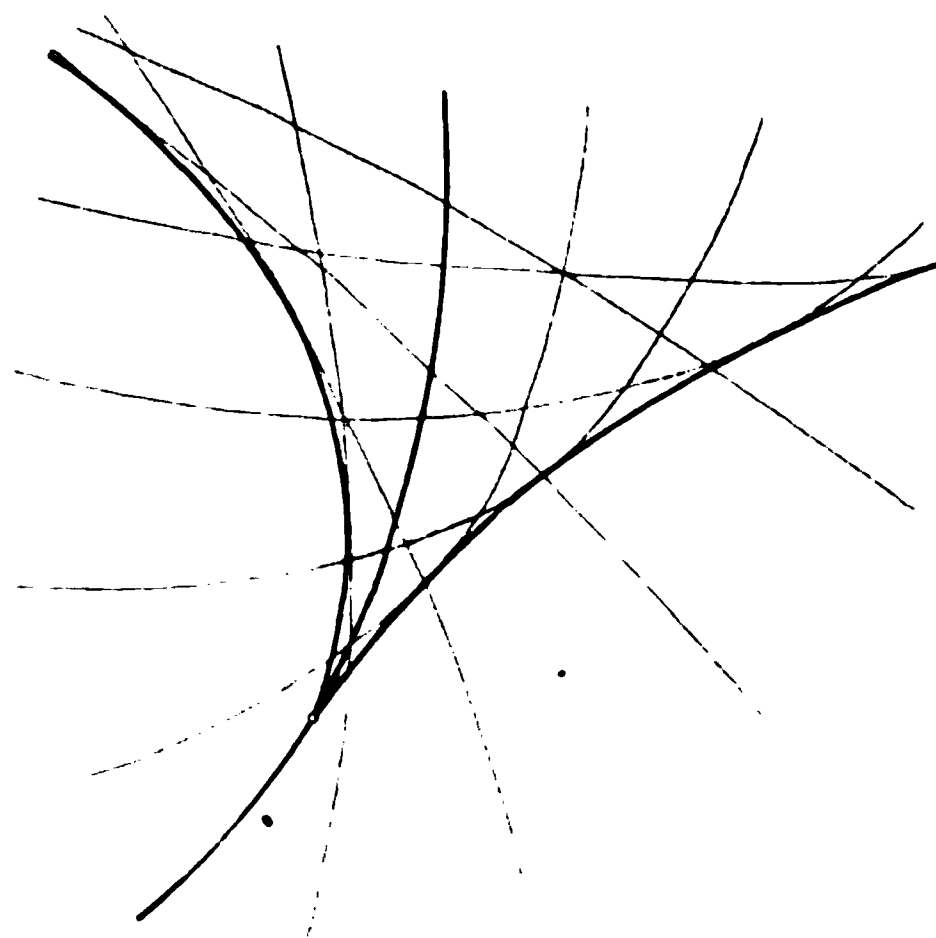
Y9A981J 09079A12

Fig. IV.



STANFORD LIBRARY

Fig. V.



YNA 981 0909194

SECRET

6
 5
 4
 3
 2
 1

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.

München.

Verlag der K. Akademie.

1893.

In Commission bei G. Franz.

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXII

Jahrgang 1892.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 133. Stiftungstages am 28. März 1892.

v. Pettenkofer: Einleitender Vortrag	189
v. Voit: Nekrologe	196

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1892.

M. v. Pettenkofer: Einleitender Vortrag	365
Wahlen	367

Sitzung vom 9. Januar 1892.

*H. Rauff: Untersuchungen über die Organisation und die systematische Stellung der Receptaculitiden	1
G. Bauer: Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenz- summen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als eine Summe von $n+1$ Potenzen	3

Sitzung vom 6. Februar 1892.

*A. v. Baeyer: Ueber die Reduktion der Benzolcarbonsäure	21
C. v. Voit: Ueber den Einfluss verschiedener Nahrungsmittel auf den Wassergehalt der Organe und den Hämoglobin- gehalt des Blutes	21

IV

Sitzung vom 5. März 1892.

	Seite
Jac. Lüroth: Ueber die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen	27
L. Boltzmann: Ueber das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher elektrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten .	53
R. Emden: Ueber den Magnetismus des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen (Mit Tafel I) . . .	71
H. Brunn: Ueber Verkettung (Mit Tafel II—IV)	77
Walter Dyck: Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme (zweite Mittheilung) (Mit Tafel V—VII)	101
W. v. Gümbel: Geologische Bemerkungen über die warme Quelle des Brennerbades und ihre Umgebung	137

Sitzung vom 7. Mai 1892.

A. Pringsheim: Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich	211
A. Voss: Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie	247
*N. Rüdinger: Uebergabe eines von demselben zusammengestellten Kataloges der anthropologischen Sammlung der hiesigen anatomischen Anstalt	210

Sitzung vom 11. Juni 1892.

L. Boltzmann: Ueber ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen. Theil I	279
A. C. Gill: Ueber Auflösung und Wachsthum der Krystalle .	303
*A. v. Baeyer: Ueber die Synthese des Dihydrobenzols . .	279

Sitzung vom 2. Juli 1892.

*C. v. Kupffer: Mittheilungen über die Entwicklung des Störs	307
*A. v. Baeyer: Weitere Versuche über die Synthese des Dihydroparaxylols	307

Sitzung vom 5. November 1892.

	Seite
L. Boltzmann: Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft. III. Theil	329
*E. Lommel: Vorlage der gesammelten Abhandlungen G. L. Ohm's	327
L. Sohncke: Ueber wissenschaftliche Luftfahrten des Münchener Vereins für Luftschiffahrt	359
*L. Radlkofer: Verlauf und Ergebnisse des internationalen botanischen Congresses zu Genua	328
M. v. Pettenkofer: Vorlage von Photographien eines in den Pampas ausgegrabenen grossen diluvialen Säugethieres	328

Sitzung vom 3. Dezember 1892.

E. Lommel: Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens	371
*W. Dyck: Vorlage des Kataloges mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente	370

Einsendung von Druckschriften	309, 377
---	----------

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 9. Januar 1892.

1. Herr K. A. v. ZITTEL berichtete über den Fortgang seiner Monographie über fossile Spongien und legte zugleich eine Abhandlung seines Mitarbeiters, des Herrn Dr. HERMANN RAUFF in Bonn: „Untersuchungen über die Organisation und die systematische Stellung der Receptaculitiden“ vor. Dieselbe soll in die Denkschriften aufgenommen werden.

2. Herr GUSTAV BAUER hielt einen Vortrag: „über die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als eine Summe von $n+1$ Potenzen.“

Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als eine Summe von $n+1$ Potenzen.

Von Gustav Bauer.

(Eingelaufen 15. Januar.)

1. Ist f eine binäre Form n^{ten} Grads, ψ eine solche i^{ten} Grads

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n \quad (1)$$

$$\psi = b_0 x_1^i + \binom{i}{1} b_1 x_1^{i-1} x_2 + \cdots + b_i x_2^i \quad (i < n) \quad (2)$$

und man bildet aus $\psi(x_1, x_2)$ das Operationssymbol

$$\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

und operirt hiemit auf f , so erhält man, wie bekannt, eine Covariante von f und ψ (Intermutante) vom Grade $n-i$

$$V = c_0 x_1^{n-i} + \binom{n-i}{1} c_1 x_1^{n-i-1} x_2 + \cdots, \quad (3)$$

deren Coefficienten c durch die Formel

$$c_k = a_k b_i - \binom{i}{1} a_{k+1} b_{i-1} + \binom{i}{2} a_{k+2} b_{i-2} + \cdots \quad (4)$$

bestimmt sind. Ist speziell $i = n$, so reducirt sich V auf eine Invariante

$$V_0 = a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n b_0.$$

Denkt man sich durch die Formen f und ψ n , resp. i , Punkte einer Geraden dargestellt, so ist die Covariante V geometrisch definirt als die gemischte Polare der i Punkte ψ in Bezug auf die n Punkte f . Sind nun die Coefficienten b von ψ so bestimmt, dass die sämtlichen Coefficienten $c_0 \cdots c_1 \cdots c_{n-i}$ von V verschwinden, so kann man¹⁾, analog zu der Bezeichnung von Herrn Reye im ternären und quaternären Gebiet, die Form ψ als apolar zu f bezeichnen, und es gilt dann allgemein der Satz: Soll die Funktion f in eine Summe von i Potenzen zerlegt werden, in der Weise

$$f = \mu_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^n + \mu_2 (x_1 - \alpha_2 x_2)^n + \cdots + \mu_i (x_1 - \alpha_i x_2)^n$$

so müssen $x_1 - \alpha_1 x_2, x_1 - \alpha_2 x_2, \cdots$ Linearfaktoren einer zu f apolaren Form ψ sein.

Ist $i = \frac{n+1}{2}$ (n ungerade), so ist ψ vom Grade $\frac{n-1}{2}$ mit $\frac{n+1}{2}$ Coefficienten, und man hat mithin $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten b . Die apolare Function ψ ist dann vollkommen bestimmt und es gibt dann auch nur eine Zerlegung von f in $\frac{n+1}{2}$ Potenzen. Es ist die bekannte von Sylvester gegebene Zerlegung einer Form vom Grade $2m+1$ in die canonische Form einer Summe von m Potenzen.²⁾

Ist $i = n$, so hat man nur eine Bedingungsgleichung für die b , nämlich $V_0 = 0$; man kann dann die b so bestimmen, dass ψ apolar wird zugleich zu n Formen $f_1 \cdots f_n$ n^{ten} Grads, welche sämtlich mittelst der Linearfaktoren von ψ in Summen

1) Sturm. „Darstellung bin. Formen auf der cubischen Raumcurve. Crelle's Journ. Bd. 86. S. 117.

2) Philos. Mag. 4. Ser. Vol. II. 1851. S. 391.

wo

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_i \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_i^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-1} & \cdots & \alpha_i^{i-1} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Setzen wir in (5) $k+1$ statt k , setzen sodann die beiden Werthe von μ_1 einander gleich und entwickeln die beiden Determinanten nach den Coefficienten a , so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (a_k \delta_{0,1} + a_{k+1} \delta_{1,1} + \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-1,1}) \\ & + a_{k+1} \delta_{0,1} + a_{k+2} \delta_{1,1} \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-2,1} + a_{k+i} \delta_{i-1,1} \end{aligned} \quad (6)$$

wenn man mit $\delta_{r,s}$ die Unterdeterminante von \mathcal{A} bezeichnet, welche man erhält, wenn man in \mathcal{A} die Reihe der r^{ten} Potenzen und die Vertikalreihe mit der Wurzel α_s streicht. Nun ergibt sich unschwer die Formel

$$\delta_{r,s} = \delta_{i-1,s} \cdot \pi_{i-1-r}^{(s)}, \quad (7)$$

wo $\pi_{i-1-r}^{(s)}$ die Summe der Combinationen aller Wurzeln α mit Ausschluss von α_s zu je $i-r-1$ bezeichnet. Die Grösse $\delta_{i-1,s}$ aber ist, wie man aus ihrer Determinantenform sofort ersieht, das Product sämtlicher Differenzen der Wurzeln α mit Ausschluss von α_s mit einem gewissen Zeichen behaftet, nämlich

$$(-1)^{i+s} \cdot \delta_{i-1,s} = \frac{\mathcal{A}}{(\alpha_s - \alpha_1)(\alpha_s - \alpha_2) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)}. \quad (8)$$

Ersetzt man nun in (6) die Grössen $\delta_{r,1}$ durch ihre Werthe aus (7), so verwandelt sie sich in folgende Gleichung

$$\begin{aligned} & a_k \cdot \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_i + a_{k+1} \Sigma \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} + \cdots \\ & + a_{k+i-1} \Sigma \alpha_1 + a_{k+i} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

wo die Σ symmetrische Funktionen sämtlicher Wurzeln α (α_1 einbegriffen) sind. Die Symmetrie der Gleichung in Be-

zug auf sämtliche Grössen α zeigt, dass wir immer dieselbe Gleichung erhalten würden, wenn wir zur Berechnung statt μ , irgend ein anderes μ benützen würden. Wir haben also nur diese Relation zwischen den a und den α ; dieselbe zählt aber für $n+1-i$ Relationen, da sie für jedes k von $k=0$ bis $k=n-i$ gilt.

Ist

$$\psi = b_0 x_1^i + \binom{i}{1} b_1 x_1^{i-1} x_2 + \dots = 0 \quad (10)$$

die Gleichung, deren Wurzeln die Grössen $\alpha_1 \dots \alpha_i$ sind, so geht die Relation (9) über in

$$a_k b_i - \binom{i}{1} a_{k+1} b_{i-1} + \binom{i}{2} a_{k+2} b_{i-2} - \dots \pm a_{k+i} b_0 = 0 \quad (11)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-i.)$$

Damit ist aber der Beweis geliefert, dass die Covariante V verschwinden, d. h. ψ zu f apolar sein muss.

Was nun aber die Coefficienten μ in der Entwicklung (2) betrifft, so ist μ_s durch die Gleichung (4) gegeben, wenn wir statt der Reihe der Potenzen von α_1 die Reihe der Potenzen von α_s weglassen und den Faktor $(-1)^{s-1}$ beifügen. Die Entwicklung der Determinanten liefert sodann

$$\Delta \mu_s = \frac{(-1)^{k+s-1}}{\alpha_s^k} (a_k \delta_{0,s} + a_{k+1} \delta_{1,s} + \dots + a_{k+i-1} \delta_{i-1,s})$$

oder wenn wir die $\delta_{r,s}$ durch ihre Werthe aus (7) und (8) ersetzen,

$$\mu_s = \frac{(-1)^{k+i-1}}{\alpha_s^k} \cdot \frac{a_{k+i-1} + \pi_1^{(s)} a_{k+i-2} + \dots + \pi_{i-1}^{(s)} a_k}{(\alpha_s - \alpha_1)(\alpha_s - \alpha_2) \dots (\alpha_s - \alpha_i)} \quad (12)$$

Aus diesem Ausdruck für μ_s können wir aber alle α ausser α_s mit Hilfe der Funktion ψ entfernen. Denn es ist, wenn ψ' die Abgeleitete von $\psi(x)$ bezeichnet

$$\psi'(\alpha_s) = b_0 (\alpha_s - \alpha_1) \dots (\alpha_s - \alpha_i)$$

Setzen wir ferner (13)

$$x_1 \cdot \frac{\psi}{\alpha_s x_2} = b_0 x_1^{i-1} + \binom{i-1}{1} b_1^{(s)} x_1^{i-2} x_2 + \dots + b_{i-1}^{(s)} x_2^{i-1},$$

so ist $\binom{i-1}{1} \frac{b_1^{(s)}}{b_0} = -\pi_1^{(s)}$ u. s. f. und der Ausdruck für μ_s nimmt die Form an

$$\mu_s = \frac{(-1)^{k+i-1}}{\alpha_s^k \cdot \psi'(\alpha_s)} \cdot (b_0 a_{k+i-1} + \binom{i-1}{1} b_1^{(s)} a_{k+i-2} + \dots + b_{i-1}^{(s)} a_k) \quad (14)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-i+1).$$

Da die Coefficienten b nur von den a abhängen, aber die α nicht enthalten, so enthalten die $b^{(s)}$ nur die eine Wurzel α_s und man ersieht mithin, dass sich die Grössen μ immer so bestimmen lassen, dass der Coefficient μ_s , der in der Entwicklung nach Potenzen $(x_1 - \alpha_s x_2)^n$ multiplicirt, nur α_s enthält.¹⁾

3. Wenden wir nun diese allgemeinen Formeln an auf die Entwicklung einer Form vom Grade $2n$

$$f = a_0 x_1^{2n} + \binom{2n}{1} a_1 x_1^{2n-1} x_2 + \dots + a_{2n} x_2^{2n} \quad (1)$$

in eine Summe von $n+1$ Potenzen.

Die apolare Form

$$\psi = b_0 x_1^{n+1} + \binom{n+1}{1} b_1 x_1^n x_2 + \dots \quad (2)$$

ist in diesem Falle nicht vollständig bestimmt, da das Gleichungssystem (11) $n^0 2$ nur $2n - (n+1) = n-1$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+1$ Coefficienten b liefert. Wir könnten aus diesem System die b in der Form $p\lambda + q\lambda'$, $p_1\lambda + q_1\lambda'$,
-- -- --

1) Man ersieht übrigens auch, dass $\psi=0$ keine gleichen Wurzeln enthalten darf, wenn die Entwicklung möglich sein soll.

u. s. f. berechnen, wo λ, λ' unbestimmte Grössen, und es bliebe sodann die willkürliche Grösse $\frac{\lambda}{\lambda'}$ in den Werthen der Wurzeln α und der Grössen μ . Oder auch, wir könnten zu dem System (11) noch eine beliebige lineäre Gleichung

$$a'_0 b_{n+1} + a'_1 b_n + \dots + a'_{n+1} b_0 = 0$$

hinzufügen. Sind hier die a' gegebene Zahlen, so bliebe nichts Unbestimmtes mehr in den b und wir würden eine spezielle Entwicklung erhalten. Lassen wir aber die a' unbestimmt, so würden diese in die b eingehen, ohne dass jedoch eine grössere Allgemeinheit in der Entwicklung dadurch erzielt würde, als im ersten Falle, wenn wir keine weitere Gleichung zu Hülfe nehmen. Zweckmässiger wird es jedoch bei dieser Unbestimmtheit der Coefficienten b sein, eine Wurzel α der Gleichung $\psi = 0$ als willkürlich gegeben anzusehen. Dann muss sich eine Gleichung aufstellen lassen, welche mittelst dieser Wurzel die n übrigen Wurzeln α bestimmt und mithin nur noch vom n^{ten} Grade ist. Diese Gleichung ergibt sich auf folgende Weise.

Nach Gleichung (14) oder (12) haben wir für μ_s das System von Gleichungen

$$(-1)^{k+n} \cdot \alpha_s^k \psi'(\alpha_s) \mu_s = a_{k+n} + \pi_1^{s1} a_{k+n-1} + \dots + \pi_n^{sn} a_k \quad (3)$$

($k = 0, 1, \dots, n$)

wo der Kürze wegen ψ statt $\frac{1}{b_0} \psi$ gesetzt ist, also

$$\psi'(\alpha_s) = (\alpha_s - \alpha_1) \dots (\alpha_s - \alpha_{s+1}) (\alpha_s - \alpha_{s+1}) \dots (\alpha_s - \alpha_n) \quad (4)$$

Die Elimination der n Grössen π aus diesem System liefert

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_0 a_1 \dots a_n & & & a_0 a_1 \dots a_{n-1} & & 1 \\ a_1 a_2 \dots a_{n+1} & & & a_1 a_2 \dots a_n & & \alpha_s^1 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ a_n a_{n+1} \dots a_{2n} & & & a_n a_{n+1} \dots a_{2n-1} & & + \alpha_s^n \end{array} \cdot (-1)^n \psi'(\alpha_s) \mu_s = 0$$

Setzen wir

$$J, \begin{vmatrix} a_0 a_1 \cdots a_n & a_0 a_1 \cdots a_{n-1} & 1 \\ a_1 a_2 \cdots a_{n+1} & a_1 a_2 \cdots a_n & \alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n a_{n+1} \cdots a_{2n} & a_n \cdots a_{2n-1} & \pm \alpha^n \end{vmatrix} = A_s \quad (5)$$

so ist mithin

$$(-1)^n \mu_s = \frac{J}{A_s \psi'(\alpha_s)} \quad (6)$$

Nun ist ferner $\psi'x - 0$ die Gleichung, welche die sämtlichen α mit Ausnahme von α_s zu Wurzeln hat. Also ist

$$\psi'(x) = x^n - \pi_1^{(s)} x^{n-1} + \pi_2^{(s)} x^{n-2} - \cdots \pm \pi_n^{(s)} = 0 \quad (7)$$

die Gleichung dieser Wurzeln. Nehmen wir diese Gleichung, zu dem System (3) hinzu und eliminiren aus den $n+2$ Gleichungen zugleich die π und ψ' , so erhält man die gesuchte Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 - x & + x^2 & \cdots & + x^n & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} & \alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} & \pm \alpha_s^n \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

welche, wenn α_s gegeben die n übrigen Wurzeln α gibt. Der Coefficient der höchsten Potenz x^n in dieser Gleichung ist A_s . Also ist diese Determinante in (8), wie aus (7) zu ersehen $= A_s \psi'(x)$. Der Nenner von μ_s in (6) ist also das, was diese Determinante wird, wenn man darin α_s statt x setzt. Also

$$(-1)^n \mu_s = \frac{J}{H(\alpha_s)}, \quad (9)$$

wo

$$H(\alpha_s) = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_s + \alpha_s^2 & \dots & \pm \alpha_s^n & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 1 \\ a_1 & a_1 & a_3 & \dots & a_{n-1} - \alpha_s & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} & \pm \alpha_s^n \end{vmatrix} \quad (10)$$

und die Entwicklung von f ist mithin

$$(-1)^n \cdot f = J \left\{ \frac{(x_1 - \alpha_1 x_2)^{2n}}{H(\alpha_1)} + \frac{(x_1 - \alpha_2 x_2)^{2n}}{H(\alpha_2)} + \dots + \frac{(x_1 - \alpha_{n+1} x_2)^{2n}}{H(\alpha_{n+1})} \right\} \quad (11)$$

Die Determinanten die zu dieser Entwicklung dienen, sind bekannte Covarianten, resp. Invarianten von f . J ist die bekannte Invariante $n + 1^{\text{ten}}$ Grads, welche symbolisch, wenn

$$f = b_x^{2n} = c_x^{2n} = \dots = g_x^{2n} = h_x^{2n},$$

durch die Formel dargestellt wird,

$$J = (bc)^2 (bd)^2 \dots (gh)^2. \quad (12)$$

H ist eine Covariante $C'_{2n,n}$ von der Ordnung $2n$ und vom Grade n in den Coefficienten. Sie ist die Evektante der Invariante J_{n+1} und stellt sich mithin symbolisch in der Form dar

$$H = (cd)^2 \dots (gh)^2 c_x^2 d_x^2 \dots h_x^2 \quad (13)$$

Diese Covariante lässt sich auch schreiben, wenn C ein Zahlenfaktor,

$$H = C \cdot \begin{vmatrix} \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-2}} & \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-3} dx_2} & \dots & \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} \\ \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-3} dx_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} & \cdot & \cdot & \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_2^{2n-2}} \end{vmatrix} \quad (14)$$

Ist f eine biquadratische Form, so ist H die Hesse'sche Covariante.

Die Determinante (8), welche die Wurzeln α liefert, wenn α gegeben, ist eine Covariante vom n^{ten} Grad in den x , und in den α und auch vom n^{ten} Grad in den a . Sie ist, wie sich aus den folgenden $n^0 4$ ergeben wird, die apolare Form n^{ter} Ordnung von der Polaren von α in Bezug auf f , also geradezu die Sylvester'sche Canonisante dieser ungeraden Form $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grads. Sie kann auch, wenn (α, f) die Polare von α bezeichnet, in der Form geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_1^{2n-2}} & \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{d_1 x_1^{2n-3} dx_2} & \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-2}} & \cdot & \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_2^{2n-2}} \end{vmatrix} \quad (15)$$

Der symbolische Ausdruck derselben ist

$$(cd)^2 \cdot (gh)^2 c_a d_a \cdot h_a \cdot c_x d_x \cdot h_x.$$

Hier mögen ein paar Beispiele einer solchen Entwicklung folgen:

$$1) \text{ Sei } f = (x^2 - 1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$$

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{5}, a_3 = 0, a_4 = +\frac{1}{5}, a_5 = 0, a_6 = -1$$

Hiemit berechnet sich

$$J = \frac{4^2}{5^4}$$

Gleichung (8) wird

$$\frac{4}{5^3} \left\{ (\alpha + \alpha^3) x^3 - (1 + 5\alpha^2) x^2 + (5\alpha + \alpha^3) x - (1 + \alpha^2) \right\} = 0$$

Auf der linken Seite $x = \alpha$ gesetzt, gibt

$$H(\alpha) = \frac{4}{5^3} (\alpha^2 - 1)^3,$$

also H nur um einen constanten Faktor von f verschieden, analog wie bei biquadratischen Formen, wenn f ein vollständiges Quadrat. Die Zerlegung ist daher

$$-f = \frac{4}{5} \left\{ \frac{(x - \alpha_1)^6}{(\alpha_1^2 - 1)^3} + \frac{(x - \alpha_2)^6}{(\alpha_2^2 - 1)^3} + \frac{(x - \alpha_3)^6}{(\alpha_3^2 - 1)^3} + \frac{(x - \alpha_4)^6}{(\alpha_4^2 - 1)^3} \right\}.$$

Die Wurzel der obigen Gleichung 3^{ten} Grads sind

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha_3 = \frac{2\alpha \pm (1 - \alpha^2) \sqrt{-1}}{1 + \alpha^2}.$$

Einfacher würde die Formel, wenn man $\alpha = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$ setzt.

Dann sind die 4 Wurzeln

$$\alpha_1 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \alpha_2 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \alpha_3 = \frac{1 + \beta \sqrt{-1}}{1 - \beta \sqrt{-1}}, \alpha_4 = \frac{1 - \beta \sqrt{-1}}{1 + \beta \sqrt{-1}},$$

wo nun β beliebig bleibt.

2) Sei $f = 6xy(x^4 + y^4)$.

$$a_1 = a_5 = 1, a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = 0, \text{ also } J = 1.$$

Die Gleichung (8) wird

$$\alpha + x + \alpha^3 x^2 + \alpha^2 x^3 = 0,$$

$$\text{deren Wurzeln } \alpha_2 = \alpha, \alpha_3 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{-1}, \alpha_4 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{-1}.$$

Die linke Seite der Gleichung gibt, wenn α statt x gesetzt wird.

$$H(\alpha) = 2\alpha(1 + \alpha^4).$$

f_n , oder, nach der früher gebrauchten Bezeichnung, zu (φ_k, f_n) . Dies folgt sofort aus der Theorie der Polaren oder der harmonischen Mittelpunkte.

Ist $i = n$, also $\psi_n = \varphi_k \cdot \psi_{n-k}$, so muss demnach ψ_{n-k} apolar sein zu (φ_k, f_n) und wenn $n - k$ ungerade, so kann man für ψ_{n-k} diese Polare (φ_k, f_n) selbst nehmen, da eine ungerade Form zu sich selbst apolar ist.¹⁾ Dies ist der Satz von Herrn Sturm.

Aus dem allgemeinen Satze ergibt sich nun aber sofort, was oben ($n^0 3$) von der Determinante (8), aus welcher die Wurzeln α sich bestimmen, gesagt wurde. Denn ist ψ_{n+1} apolar zu f_{2n} und ψ_{n+1} zerlegt sich in $\varphi_1 \cdot \psi_n$, so muss ψ_n apolar sein zu der Polare $(\varphi_1 \cdot f_{2n})$. Aber diese ungerade Form $(2n - 1)^{\text{ten}}$ Grads hat nur eine apolare Form n^{ten} Grads, nämlich die „Canonisante“ von Sylvester, und folglich muss ψ_n eben die Canonisante von $(\varphi_1 \cdot f_{2n})$ sein; also auch die Determinante (8) nach dortiger Bezeichnung die Canonisante von (αf) . Von diesen Betrachtungen ausgehend, hätte man direkt zu der Gleichung (8) gelangen können, hätte aber dabei nichts gewonnen für die Bestimmung der Coefficienten μ .

5. Es ist bekannt, dass wenn die Invariante J verschwindet, die Form f $2n^{\text{ten}}$ Grads sich in eine Summe von nur n Potenzen zerlegen lässt. In diesem Falle $J = 0$ verschwindet in der That in der Entwicklung (11) der Coefficient μ_s , welcher zu der beliebigen Wurzel α_s gehört. Die andern Coefficienten μ aber verschwinden im Allgemeinen nicht. Verschwindet nämlich μ_s , so wird das System der $(n + 1)$ Gleichungen (3) $n^0 3$.

$$0 = a_{k+n} + \pi_1^{(s)} a_{k+n-1} + \dots + \pi_n^{(s)} a_k, \\ (k = 0, 1 \dots n)$$

1) Rosanes „Ueber ein Princip der Zuordnung etc.“ Crelle's Journ. 76.

deren Determinante $J \neq 0$ ist. Lässt man eine dieser Gleichungen, z. B. die letzte, als durch die andere bestimmt, weg und nimmt die Gleichung (7) hinzu, so erhält man für die Gleichung, welche die n übrigen α gibt

$$\begin{vmatrix} 1 - x + x^2 \cdots + x^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Die willkürliche Grösse α_n hebt sich ganz aus der Potenzdarstellung heraus. Die Determinante in (17) ist aber nichts anderes als die mit A_n bezeichnete Determinante (5), wenn man darin α_n durch x ersetzt. Für jede der n Wurzeln α_i dieser Gleichung verschwindet mithin die Grösse A_i im Nenner des Ausdrucks für μ (6) und alle Coefficienten μ ausser μ_n , welches $\neq 0$ wird, nehmen die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

Dieselben müssen sodann aus den ursprünglichen Gleichungen direkt berechnet werden, aber die Einfachheit ihres Ausdrucks geht verloren.

6. Ist speziell f eine biquadratische Form

$$f = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 \quad (1)$$

und ψ die apolare 3^{ten} Grads

$$\psi = b_0 x_1^3 + 3 b_1 x_1^2 x_2 + 3 b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3, \quad (2)$$

so hat man die zwei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_0 b_3 - 3 a_1 b_2 + 3 a_2 b_1 - a_3 b_0 &= 0 \\ a_1 b_3 - 3 a_2 b_2 + 3 a_3 b_1 - a_4 b_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ist nun φ eine zweite biquadratische Form

$$\varphi = a'_0 x_1^4 + 4 a'_1 x_1^3 x_2 + \cdots \quad (4)$$

und soll dieselbe Form ψ auch apolar sein zu φ , so hat man die zwei weiteren Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a'_0 b_3 - 3 a'_1 b_2 + 3 a'_2 b_1 - a'_3 b_0 &= 0 \\ a'_1 b_3 - 3 a'_2 b_2 + 3 a'_3 b_1 - a'_4 b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

und es ist mithin die Bedingung, dass die zwei Formen dieselbe apolare Form 3^{ten} Grads besitzen,

$$D_{f, \varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Ist diese Bedingung¹⁾ erfüllt, so kann man zur Bildung der apolaren Form irgend drei der vier Gleichungen (3) und (5) benützen; also

$$\psi = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} \quad (7)$$

und es werden dann die beiden Formen f und φ nach den Potenzen der Linearfaktoren von ψ entwickelt werden können und ebenso überhaupt alle Formen $f + \lambda \varphi$.

Um die Coefficienten μ der Entwicklung für die ein und die andere Form zu bestimmen, wird man auf die Formeln in n^o 2 zurückgehen. Ist z. B. gegeben

$$\begin{aligned} f &= (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2 x_1 x_2 + x_2^2 \\ \varphi &= 4 x_1^3 x_2 + 18 x_1^2 x_2^2 + 12 x_1 x_2^3 + 9 x_2^4. \end{aligned}$$

1) Die Combinante $D_{f, \varphi}$ lässt sich leicht in die symbolische Form überführen. Ist $f = a_x^4 = b_x^4$, $\varphi = a_x^3 \cdot a_y^3$, so erhält man

$$4 D_{f, \varphi} = (ab)^2 (ap)^2 (aa') (ab') (ba') (b_p').$$

so ist die Bedingungsgleichung (6) erfüllt, da $D_{f,q} = 0$ wird. Die apolare Form (7) wird

$$\psi = 3x + x^3,$$

deren Wurzeln $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = +\sqrt{3}, \alpha_3 = -\sqrt{3}$.

Ferner wird für f die Gleichung (8) ($n^0 3$)

$$\frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \alpha^2 + \frac{8}{3} \alpha x + \left(\alpha^2 - \frac{1}{3} \right) x^2 \right\} = 0$$

Setzt man in diese Gleichung für α irgend eine der drei Wurzeln $0, \pm \sqrt{3}$ ein, so liefert sie die beiden andern. Die Covariante H (hier die Hesse'sche Form) wird

$$H(\alpha) = \frac{1}{3}(\alpha^2 + 1)^2.$$

Da ferner $J_3 = \frac{8}{27}$, so erhält man für die speziellen Werthe der α die Entwicklung

$$18f = 16x^4 + (x - \sqrt{3})^4 + (x + \sqrt{3})^4.$$

Für q aber ist $J_3 = 18$, die Gleichung (8) ($n^0 3$)

$$-6\alpha^2 + 18 = 3(\alpha^2 + 3\alpha)x - (\alpha^2 + 3\alpha + 6)x^2 = 0$$

Ist α eine der drei Wurzeln $0, \pm \sqrt{3}$, so gibt die Gleichung die beiden andern. Hieraus (α statt x gesetzt)

$$H(\alpha) = (\alpha^4 + 6\alpha^3 + 21\alpha^2 - 18);$$

also

$$H(0) = 18, H(\sqrt{3}) = (3 + \sqrt{3}), H(-\sqrt{3}) = 18(3 - \sqrt{3})$$

und die Entwicklung wird

$$q = x^4 + \frac{(x - \sqrt{3})^4}{3 + \sqrt{3}} + \frac{(x + \sqrt{3})^4}{3 - \sqrt{3}}.$$

7. Eine biquadratische Form f und ihre Hesse'sche

Form $H(f)$ können jedoch nie nach denselben drei Potenzen entwickelt werden.

Denn ist

$$q \quad H(f) = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1^3 x_2 + \dots$$

und bezeichnet man durch a'_0, a'_1, \dots die Coefficienten von H mit Binomialcoefficienten geschrieben, also

$$a'_0 = a_0 a_2 - a_1^2, a'_1 = \frac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2), \text{ u. s. f., so wird}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{36}(I_2^3 - 27 J_3^2) = -\frac{1}{36} \mathcal{A},$$

wo I_2 die quadratische Invariante, J_3 die Invariante 3^{ten} Grads, nämlich

$$I_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \quad J_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

also \mathcal{A} die Discriminante von f ist. Dies lässt sich leicht mittelst der canonischen Form von f verificiren. Das Verschwinden der Invariante $D_{f,q}$ bedingt mithin, dass f eine Doppelwurzel hat. Der Doppelfaktor von f ist dann auch Doppelfaktor von H^1). Berechnet man sodann die apolare Form $\psi(7)$ von f und H , so ergibt sich, dass ψ geradezu die dritte Potenz desselben Faktors ist. Die Nenner der Coefficienten μ der Darstellung von f als Potenzsumme verschwinden in diesem Falle und die Entwicklung wird unmöglich.

1) Clebsch, „Binäre Formen“ S. 162.

runge mit Brod haben später Pettenkofer und ich auch durch Respirationsversuche bestätigt.

Um die wichtige Thatsache, dass der Organismus bei der unvollkommenen Ernährung mit Brod wässriger wird, direkt darzuthun, habe ich damals zwei Katzen während längerer Zeit mit Brod gefüttert, einer dritten aber das gewöhnliche aus animalischen und vegetabilischen Nahrungsmitteln gemischte Futter verabreicht; die beiden ersteren enthielten darnach in der That im Muskel 2—5 %, im Gehirn 3—5 % Wasser mehr als die letztere.

Elf Jahre darauf wendete Herr V. Subbotin in meinem Laboratorium die damals von Preyer angegebene Methode der Bestimmung des Hämaglobins im Blute an, um bei verschiedener Nahrung den Gehalt an Hämaglobin im Blute von Kaninchen und Hunden zu ermitteln. Es zeigten sich dabei je nach der Art der Nahrung beträchtliche Unterschiede. Auch nach langem Hunger fand sich die gleiche Hämaglobinmenge wie bei der reichlichsten und besten Nahrung; anders jedoch gestaltete es sich bei ungenügender Nahrung. Die Kaninchen hatten bei Fütterung mit Heu die geringste Menge von Hämaglobin, etwas mehr bei Fütterung mit Kartoffeln oder mit Rüben und Kohl, am meisten bei Fütterung mit Brod; darnach schien der Hämaglobin-gehalt mit dem Eiweiss der Nahrung zuzunehmen. Beim Hunde trat der Einfluss der Art der Nahrung noch deutlicher hervor; nach Aufnahme von Fleisch oder von eiweissreichem Futter war die Hämaglobinmenge wesentlich höher als bei Zufuhr von viel stickstoffarmen Substanzen, besonders von Brod. Eine eiweissarme oder an stickstofffreien Stoffen, namentlich an Stärkemehl, reiche Nahrung bewirkt eine Abnahme des Hämaglobingehaltes, also diejenigen Nahrungsmittel, welche ein Wässrigwerden des ganzen Körpers hervorrufen.

Obwohl ich diese Dinge für völlig sichergestellt halte, so hatte ich doch Veranlassung, dieselben nochmals zu prüfen.

Die näheren Angaben über die Quantitäten der verzehrten und resorbirten Nahrungsstoffe, sowie über die Gewichtsverhältnisse der Thiere sollen mit eingehenden Betrachtungen in der Zeitschrift für Biologie zur Veröffentlichung gelangen.

Aus den berichteten Versuchen geht abermals hervor, dass die Zusammensetzung der Nahrung einen wesentlichen Einfluss auf den Wassergehalt der Organe und des Blutes und in Folge davon auch auf den Hämaglobingehalt des letzteren ausübt: denn der grössere Wassergehalt des ganzen Körpers und des Blutes und der geringere Hämaglobingehalt des letzteren stehen offenbar in Zusammenhang mit einander.

Es ist selbstverständlich nicht die Menge der Nahrung für sich allein oder der Eiweissgehalt derselben für sich allein das bestimmende hiefür, denn sonst müsste beim Hunger wo gar keine Nahrung und gar kein Eiweiss aufgenommen wird, die Hämaglobinmenge am geringsten sein, während wir doch selbst zuerst dargethan haben, dass dieselbe dabei so gross ist wie bei einer vorzüglichen Nahrung. Es ist vielmehr die ungenügende Zusammensetzung der Nahrung, die zu geringe Menge von Eiweiss zugleich mit einem Ueberschuss an Stärkemehl, wie schon Subbotin andeutete, welchen schädigenden Effekt hervorbringt. Wenn der Körper des Kaninchens nach Aufnahme gewisser pflanzlicher Nahrungsmittel wässriger wird und das Blut weniger Hämaglobin enthält als bei vollständigem Hunger, so kann doch nur die Zusammensetzung der Nahrung die Ursache sein.

Ich lege Werth auf diese Thatsache, da es mir durchaus nicht gleichgiltig erscheint, ob die denkbar beste Nahrung den menschlichen Körper in demselben stofflichen Zustande zurücklässt wie die schlechtest zusammengesetzte z. B. aus einem Uebermaass von Kartoffeln bestehende. Dass dies auch ganz unmöglich ist, geht schon aus dem schlechten Aussehen einer fast ausschliesslich von Kartoffeln sich nährenden Bevölkerung gegenüber einer sich reichlich ernährenden hervor.

Sitzung vom 5. März 1892.

1. Herr HUGO SEELIGER legt eine Abhandlung des correspondirenden Mitgliedes der Akademie, Herrn Prof. JAC. LÜROTH in Freiburg, vor: „über die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen.“

2. Herr LUDWIG BOLTZMANN spricht: „über das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher elektrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten.“

3. Herr LEONHARD SOHNCKE macht Mittheilung über eine in seinem Laboratorium ausgeführte Untersuchung des Herrn Dr. R. EMDEN: „über den Magnetismus des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen.“

4. Herr GUSTAV BAUER bespricht die Resultate einer ihm von Herrn Dr. HERMANN BRUNN, Privatdozenten an der hiesigen Universität, übergebenen Arbeit; „über Verkettungen.“

5. Herr WALTER DYCK bringt eine Fortsetzung seiner Untersuchungen: „über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme (zweite Mittheilung).“

6. Herr WILHELM v. GUMBEL bespricht und überreicht: „Geologische Bemerkungen über die warme Quelle des Brennerbads und seine Umgebung.“

linie in A , a' die in A' , so soll endlich \mathfrak{A} so beschaffen sein, dass die beiden Ebenenbüschel $a (B C D E \dots)$ und $a' (B' C' D' E' \dots)$ projectiv sind.

Die Beziehung

$$a (B C D E \dots) \pi a' (B' C' D' E' \dots)$$

soll gelten, wo auch die Punkte $A B C D \dots$ auf F gelegen sein mögen.

Es soll die Natur der Abbildung \mathfrak{A} bestimmt werden.

§ 2. Aus der projectiven Beziehung folgt sofort, dass wenn die Ebenen $a B$ und $a C$ zusammenfallen, auch die $a' B'$ und $a' C'$ identisch sein müssen und umgekehrt; also entsprechen Punkte von F , die irgend einer Verticalebene angehören, Punkten einer Verticalebene von F' . Vermöge \mathfrak{A} kann in Folge dessen jetzt auch jeder Ebene ε , die in einem Punkte A von F Verticalebene ist, eine andere Ebene zugeordnet werden. Denn ist B ein Punkt der Schnittcurve von F und ε , entsprechen den Punkten A, B und der Lothlinie a in A , die Punkte A', B' und die Lothlinie a' in A' , so kann man die Verticalebene $a' B'$ der $a B$ entsprechen lassen. Und diese Art der Zuordnung ist dann, dem eben gefundenen Resultate gemäss, nicht abhängig von der Wahl des Punktes B auf der Schnittcurve von ε mit F .

Gesetzt, es seien A und B zwei Punkte von F , deren Lothlinien a und b sich schneiden, sei es in einem endlichen oder in einem unendlich fernen Punkt. Sei C ein anderer Punkt von F in der Ebene $a b$. Weil B und C einer Verticalebene von A angehören, liegen B' und C' in einer Ebene durch a' . Und weil A und C auf einer Ebene durch b sich befinden, liegen A' und C' auf einer Ebene durch b' . Die drei Punkte $A' B' C'$ gehören folglich einer Ebene durch a' und einer durch b' an; liegen also $A' B' C'$ nicht in einer geraden Linie, so müssen jene beiden Ebenen zusammenfallen.

Diese Gleichungen definiren eine projective Beziehung der beiden Strahlenbündel A und A' aufeinander. Ueber die Natur der beiden Flächen F und F' aber lässt sich nichts weiter ausmachen. Ist F gegeben, so kann F' jedes beliebige Flächenstück sein, das von den Strahlen des Bündels A' in nur je einem Punkte getroffen wird. Wenn dann \mathfrak{A} einem Punkte P von F denjenigen Punkt P' von F' zuordnet, welcher aus F' von dem Strahl ausgeschnitten wird, der im Bündel A' dem Strahl PA entspricht, so sind alle oben dem \mathfrak{A} auferlegten Bedingungen erfüllt.

§ 4. Es kann aber zweitens der Fall sein, dass nicht je zwei Lothlinien sich schneiden. Dann kann man zwei Lothlinien a und b von F finden, die sich nicht treffen. Wir nehmen a zur Axe $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$, b zur Axe $x_3 = 0 \quad x_4 = 0$ eines homogenen Systems von Tetraedercoordinaten, und die a, b entsprechenden Lothlinien a' und b' zu den Axen $x'_1 = 0 \quad x'_2 = 0$ bzw. $x'_3 = 0 \quad x'_4 = 0$ eines Systems der $x'_1 x'_2 x'_3 x'_4$.

Wegen der projectiven Beziehung der Büschel mit den Axen a und a' muss der Ebene, deren Gleichung ist $x_2 - \lambda x_1 = 0$ die Ebene $x'_2 - \lambda p x'_1 = 0$ entsprechen. Für Punkte von F und ihre entsprechenden ist also

$$\frac{x'_2}{x'_1} = p \frac{x_2}{x_1}$$

was wir, $p = \frac{a_2}{a_1}$ gesetzt, in die beiden Gleichungen

$$x'_1 = l a_1 x_1 \quad x'_2 = l a_2 x_2$$

auflösen können.

Ganz ähnlich ergeben sich die Beziehungen

$$x'_3 = m a_3 x_3 \quad x'_4 = m a_4 x_4.$$

Seien nun c und c' eine dritte, von a und b verschiedene, Lothlinie von F und ihre entsprechende von F' . Durch c legen wir die beiden von einander verschiedenen Vertical-

ebenen α , β und durch c' die α' , β' , die so gewählt seien, dass α' der α , β' der β entspricht. Die Gleichungen der Ebenen α' und β' seien bezw.

$$\alpha' \dots \alpha'_1 x'_1 + \alpha'_2 x'_2 + \alpha'_3 x'_3 + \alpha'_4 x'_4 = \alpha' (x') = 0$$

$$\beta' \dots \beta'_1 x'_1 + \beta'_2 x'_2 + \beta'_3 x'_3 + \beta'_4 x'_4 = \beta' (x') = 0,$$

die von α und β seien $\alpha(x) = 0$ $\beta(x) = 0$. Wegen der projectiven Beziehung der Büschel mit den Axen c und c' muss dann

$$\frac{\alpha' (x')}{\beta' (x')} = \frac{r \alpha (x)}{s \beta (x)}$$

sein. Setzt man hier die Werthe aus 1) ein und bezeichnet

$$\alpha'_1 a_1 x_1 + \alpha'_2 a_2 x_2 = A(x) \quad \alpha'_3 a_3 x_3 + \alpha'_4 a_4 x_4 = \mathcal{A}(x)$$

$$\beta'_1 a_1 x_1 + \beta'_2 a_2 x_2 = B(x) \quad \beta'_3 a_3 x_3 + \beta'_4 a_4 x_4 = \mathcal{B}(x)$$

so kommt

$$\frac{l A(x) + m \mathcal{A}(x)}{l B(x) + m \mathcal{B}(x)} = \frac{r \alpha(x)}{s \beta(x)}$$

$$l \{s A(x) \beta(x) - r \alpha(x) B(x)\} = m \{r \alpha(x) \mathcal{B}(x) - s \beta(x) \mathcal{A}(x)\}.$$

Mit Hilfe der Zeichen

$$\begin{aligned} 2) \quad S &= r \alpha(x) \mathcal{B}(x) - s \beta(x) \mathcal{A}(x) \\ T &= s A(x) \beta(x) - r \alpha(x) B(x) \end{aligned}$$

kann man also

$$l = \varrho S \quad m = \varrho T$$

schreiben und findet dann in

$$1. \quad \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= \varrho S x_1 \\ x'_2 &= \varrho S x_2 \\ x'_3 &= \varrho T x_3 \\ x'_4 &= \varrho T x_4 \end{aligned} \right.$$

die Beziehung der Fläche F' auf F , wie sie durch die Abbildung \mathfrak{A} gegeben ist. Diese Formeln sind aber auf Punkte

von F beschränkt. Sie stellen, allgemein betrachtet, eine birationale Raumtransformation vor, wie sie von Clifford, Cremona und Nöther untersucht worden sind, und zwar geben sie diejenige specielle Umformung, die Nöther auf Seite 570 seiner Arbeit im 3. Bande der Math. Annalen aufführt.

§ 5. Diese Formeln können illusorisch werden, wenn S oder T für die Punkte von F , oder gar identisch, verschwinden.

Wenn S identisch Null ist, so ist entweder $A(x) = 0$ $B(x) = 0$. Dann wären, weil a_3 und a_4 nicht Null sein können, $\alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \beta_4$ alle Null und es enthielten die Functionen $\alpha'(x'), \beta'(x')$ nur x_1 und x_2 , so dass c' mit a' zusammenfiel und dann auch c mit a . Oder es ist

$$B(x) = \frac{s}{r} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot A(x)$$

also, weil $\beta(x)$ zu $\alpha(x)$ prim ist, $A(x)$ durch $\alpha(x)$ theilbar,

$$A(x) = c_0 \alpha(x) \text{ und } B(x) = \frac{s}{r} c_0 \beta(x), \text{ wo } c_0 \text{ constant.}$$

Dann würden α und β für $x_3 = 0, x_4 = 0$ verschwinden, d. h. c fiel mit b zusammen, gegen die Annahme. Also kann S nicht identisch $= 0$ sein. Wenn es aber bedingt, für die Punkte von F , verschwindet, so ist F ein Stück der Fläche zweiter Ordnung S , deren Gleichung $S = 0$ ist. Würde S nicht zerfallen, so wäre sie durch F vollständig bestimmt und könnte von der Wahl der Lothlinien a, b, c nicht abhängen. Weil aber für c die Functionen α und β Null sind, liegt c auf der Fläche S , und weil c ganz beliebig ist, müssten dann alle Lothlinien der Fläche S angehören, was nicht möglich ist, weil die Lothlinien eines Flächentheils einen Raumtheil erfüllen und S dann identisch Null wäre. Wenn aber S zerfiel, so könnte es nur aus zwei Ebenen bestehen, und F wäre ein Stück von einer derselben, was

auch sich gegenseitig schneiden, oder es gibt Paare, deren Linien a schneiden, ohne sich zu treffen.

Wenn diese letztere Möglichkeit einträfe, so wäre nach § 6 \mathfrak{U} projectiv. Im ersten Falle müssten a und alle Lothlinien, die a treffen, entweder in einer Ebene liegen, oder durch einen Punkt gehen. Der Ort G der Fusspunkte wäre also ein Curvenstück oder höchstens ein Flächentheil, der von F verschieden ist, wenn wir den in § 3 absolvirten Fall ausschliessen. Aehnliche Verhältnisse treten bei b ein. Der Ort H der Fusspunkte der Lothlinien, die b treffen, ist auch eine Curve oder höchstens ein Flächentheil, wenn nicht die Abbildung \mathfrak{U} projectiv ist. Wenn G und H zusammen F ausfüllten, würde, weil a und b sich nicht schneiden, nicht an allen Punkten, wo G und H aneinander grenzen, Stetigkeit in der Richtung der Lothlinien stattfinden können. Da wir diese angenommen haben, muss es sicher auch einen Flächentheil K von F geben, dessen Punkte weder G noch H angehören. Die Lothlinien, deren Fusspunkte auf K liegen, schneiden dann weder a noch b . Aus ihnen sei nun die in den Formeln I § 4 benutzte Lothlinie c gewählt; dann müssen $\alpha(x)$, wie $\beta(x)$ jedenfalls mindestens eine Variable des Paares x_1, x_2 und mindestens eine des Paares x_3, x_4 enthalten, weil sonst c die Linie b bezw. a schneiden würde.

Unter den Lothlinien, deren Fusspunkte K angehören, gibt es unendlich viele, die c nicht treffen. Denn eine Ueberlegung, die der im Anfang des § angestellten analog ist, zeigt, dass die Fusspunkte der c schneidenden Lothlinien einen Flächentheil L höchstens erfüllen können und dass sie durch einen Punkt gehen müssen, wenn \mathfrak{U} nicht projectiv ist. Wenn L mit K identisch wäre, hätten wir an den Grenzen von K und G , sowie von K und H Unstetigkeiten der Richtungen der Lothlinien. Daher muss nach Abzug von L aus K noch ein Flächentheil M übrig bleiben, dessen Lothlinien c nicht treffen.

schneiden, die c nicht trifft und die natürlich von a , b und c abhängen wird. Da aber (§ 7) d noch unter unendlich vielen Lothlinien gewählt werden kann, die c nicht treffen, kann man sie immer von jener Linie verschieden annehmen. Somit ist der Fall nicht möglich; die Gleichung II kann nicht identisch bestehen, wenn S und T theilerfremd sind, sondern höchstens, wenn sie einen gemeinsamen Theiler haben.

§ 10. Sind S und T nicht relativ prim, so können sie einen Factor ersten oder einen zweiten Grades gemein haben. Im letzten Falle muss $T = \mu S$ sein, wo μ eine Constante. Dann aber geben die Formeln I

$$x'_1 = \varrho S \cdot x_1 \quad x'_2 = \varrho S \cdot x_2 \quad x'_3 = \varrho S \cdot \mu x_3 \quad x'_4 = \varrho S \cdot \mu x_4,$$

die eine projective Transformation liefern.

Es können aber S und T auch einen gemeinsamen Factor ersten Grades τ haben, so dass $S = \tau S_1$, $T = \tau T_1$ ist. Dann müssten die beiden Functionen S und T zerfallen. Soll S zerfallen, so muss, weil A und B nur x_3 und x_4 enthalten, einer der beiden Factoren eine Function nur von diesen beiden Variabeln sein, die wir $m x_3 - l x_4$ setzen wollen. Dann müsste S für $x_3 = l x_4 = m$ verschwinden, oder, wenn wir $A(l, m) = g$, $B(l, m) = f$ setzen

$r f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + l \alpha_3 + m \alpha_4) = s g(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + l \beta_3 + m \beta_4)$,
somit auch

$$r f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = s g(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

sein. Nach einer Bemerkung in § 7 können die beiden hier vorkommenden Functionen nicht Null sein. Ist nun weder f noch g Null, so folgt, dass für $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ die Functionen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ verschwinden, dass also c und b sich schneiden. Wäre $f = 0$, so müsste auch $g = 0$ sein, weil $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ nicht identisch Null sein kann. Danach ist jene Gleichung möglich, wenn f und g gleich-

und C , Γ an die Stelle von A und \mathcal{A} treten, wenn man c durch d ersetzt. Die letzte Gleichung gibt aber

$$\Gamma = v \mathcal{A} \quad C = v A,$$

wo v ein constanter Factor. Aus der ersten dieser beiden

$$\gamma'_3 a_3 x_3 + \gamma'_4 a_4 x_4 = v(\alpha'_3 a_3 x_3 + \alpha'_4 a_4 x_4)$$

folgt aber $\gamma'_3 = \alpha'_3 v$, $\gamma'_4 = \alpha'_4 v$ und aus der zweiten $\gamma'_1 = \alpha'_1 v$, $\gamma'_2 = \alpha'_2 v$. Beide zusammen ergeben daher

$$\gamma'(x') = v \alpha'(x').$$

Es ist aber $\gamma'(x') = 0$ eine Ebene durch die Linie d' , $\alpha'(x') = 0$ eine Ebene durch c' ; daher sagt die letzte Gleichung aus, dass c' und d' , also auch c und d sich schneiden, was durch Wahl von d nach § 8 stets vermieden werden kann.

Die Gleichung II kann also auch dann nicht identisch bestehen, wenn S und T einen Factor ersten Grades haben. Haben sie einen Factor zweiten Grades, ist also \mathfrak{A} projectiv, so ist die Betrachtung jener Gleichung überhaupt unnöthig.

§ 11. Die Gleichung II kann aber vielleicht nur bedingt, für die Punkte von F , bestehen.

Ist $\Phi = 0$ die Gleichung einer unzerlegbaren Fläche vierter Ordnung Φ , so ist sie durch das Flächenstück F vollständig bestimmt und kann von der Wahl der Lothlinien $a b c d$ nicht abhängen. Da aber S und T für c , U und V für d , S und U für b , T und V für a verschwinden, so gehören diese Linien Φ an. Die Betrachtung von § 7 zeigt jedoch, dass die Lothlinie a ganz beliebig gewählt werden kann. Läge sie auf Φ , so müssten alle Lothlinien auf Φ liegen. Dann aber müsste die Function Φ , gegen die hier gemachte Annahme, identisch Null sein, weil die Lothlinien eines Flächentheils einen Raumtheil erfüllen. Daher muss die Function Φ zerfallen, entweder in einen Factor dritten Grades Φ_3 , der nicht weiter zerfällt, und einen Factor ersten

Sind $d, e, f, g \dots$ andere Lothlinien, deren Fusspunkte auf K liegen, so gehören also $abcd, abce, abcf, abcg, \dots$ je derselben Fläche zweiter Ordnung an. Weil diese aber die drei windschiefen Geraden abc gemein haben, fallen sie zusammen, so dass alle Lothlinien aus K der nämlichen Fläche zweiter Ordnung angehören müssten, was nicht eintreten kann. Folglich kann die Gleichung II auch nicht bedingt, für die Punkte von F , erfüllt sein.

Ueberblickt man die gefundenen Resultate, so zeigt sich, dass keine Möglichkeit bleibt, als dass die Abbildung \mathfrak{A} projectiv ist.

§ 12. Diese projective Umformung gilt zunächst nur für die Punkte von F . Man kann sie aber auch auf die Punkte, Geraden und Ebenen im Raume anwenden und in dieser allgemeineren Weise sei sie mit \mathfrak{Z} bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}$ zunächst nur für die Punkte von F .

Sei nun ϵ eine Verticalebene von F ; A, B, C drei in ihr gelegene Punkte von F . Dann gehen diese durch \mathfrak{A} oder \mathfrak{Z} in A', B', C' über, die in der Ebene $\mathfrak{A}\epsilon$ gelegen sind, die ϵ durch \mathfrak{A} nach § 1 zugeordnet ist. Da aber vermöge \mathfrak{Z} aus ϵ wieder eine Ebene $\mathfrak{Z}\epsilon$ hervorgeht, welche die drei Punkte A', B', C' enthalten muss, so muss $\mathfrak{Z}\epsilon = \mathfrak{A}\epsilon$ sein, weil ja nach unserer Annahme F' keine geraden Linien enthalten soll. Da weiter zwei Verticalebenen desselben Punktes sich in der Lothlinie des Punktes schneiden, so folgt, dass auch die Lothlinien von F durch die Transformation \mathfrak{Z} in die von F' übergehen, so dass also Punkte, Ebenen und Geraden, die sich vermöge \mathfrak{A} entsprechen, auch durch \mathfrak{Z} aus einander hervorgehen.

§ 13. Nimmt man an, man hätte durch ein gehörig dichtes Netz von Messungen auf einer unbekannten Fläche F' mit einem nicht bekannten System von Lothlinie Σ' die Ueberzeugung gewonnen, dass sie sich auf einer bekannten

zeichnet. Wegen der Gleichheit der Winkel zwischen entsprechenden Ebenen muss dann $(\lambda \mu \alpha \beta) = (\lambda' \mu' \alpha' \beta')$ sein. Weiter erfordert die Winkelgleichheit die Gleichungen $(\lambda \mu \alpha \gamma) = (\lambda' \mu' \alpha' \gamma')$, $(\lambda \mu \alpha \delta) = (\lambda' \mu' \alpha' \delta') \dots$, die zusammen

$$\lambda \mu \alpha \beta \gamma \delta \dots \propto \lambda' \mu' \alpha' \beta' \gamma' \delta' \dots$$

liefern. Da \mathfrak{T} projectiv ist, ist es auch die umgekehrte Transformation \mathfrak{T}^{-1} ; wenn man diese auf $\lambda' \mu' \alpha' \beta' \dots$ anwendet und $\mathfrak{T}^{-1} \lambda' = \lambda_1$, $\mathfrak{T}^{-1} \mu' = \mu_1$ setzt, folgt, dass $\lambda' \mu' \alpha' \beta' \gamma' \delta' \dots \propto \lambda_1 \mu_1 \alpha \beta \gamma \delta \dots$ und also auch $\propto \lambda \mu \alpha \beta \gamma \delta \dots$ sein muss. Daher müssen die Ebenen $\lambda_1 \mu_1$ mit $\lambda \mu$ identisch sein. Da aber $\lambda' \mu'$ die von α' an ω zu legenden Tangentenebenen sind und α' durch \mathfrak{T}^{-1} in a übergeht, werden $\lambda_1 \mu_1$ die beiden Tangentenebenen sein, welche man von a aus an den Kegelschnitt Ω legen kann, der aus ω durch die Umformung \mathfrak{T}^{-1} hervorgeht. Die Lothlinie a hat somit die Eigenschaft, dass von ihr zwei Ebenen ausgehen, die gleichzeitig ω und $\mathfrak{T}^{-1} \omega = \Omega$ berühren (Vgl. Sturm Math. Annalen Bd. 28 Seite 263/64 Nr. 5). Ist demnach \mathfrak{T} gegeben, so ist auch die Richtung der Lothlinie in jedem Punkte von F bestimmt (und zwar zweideutig). Nur dann ist diese Richtung willkürlich, wenn $\Omega = \omega$ ist, was eintritt, wenn \mathfrak{T} eine Aehnlichkeitstransformation ist.

§ 15. Umgekehrt, wenn in den Punkten von F die Lothlinien bekannt sind, so ist \mathfrak{T} bestimmt. Denn die Hauptebenen der Lothlinien müssen einen Kegelschnitt Ω berühren, und da F' in der Eingangs erwähnten Beziehung zu F steht, muss auch ein solcher Kegelschnitt existiren, der freilich entweder ω selbst ist, oder von ω verschieden sein kann. Man habe nun entweder I. gefunden, dass die sämtlichen Hauptebenen der Lothlinien keinen anderen Kegelschnitt als ω berühren, oder II. erkannt, dass sie einen anderen berühren und diesen bestimmt.

Nimmt man an, es sei $a_{11} = a_{22} = 1$ gemacht, so gibt die Vergleichung der Coefficienten

$$\gamma = a_{13} \quad \delta = a_{14} \quad \varepsilon = a_{23} \quad \tilde{\varepsilon} = a_{24}$$

$$\mathcal{G}^2 = a_{33} - a_{11}^2 - a_{22}^2$$

$$r_i^2 = a_{44} - a_{14}^2 - a_{24}^2$$

$$\mathcal{G} r_i = a_{34} - a_{13} a_{14} - a_{23} a_{24}$$

Die letzte Gleichung bestimmt die Combination der Zeichen von \mathcal{G} und r_i : sie ist erfüllt, denn sie drückt aus, wie man leicht sieht, dass die Determinante von Ω Null ist. Man hat also zwei Möglichkeiten, je nachdem man, unter $\mathcal{G}_0 r_0$ ein Werthsystem von \mathcal{G}, r_i verstanden.

$$\varrho u'_3 = \mathcal{G}_0 u_3 + r_{0i} u_i$$

oder

$$\varrho u'_3 = -\mathcal{G}_0 u_3 - r_{0i} u_i$$

nimmt. Die zweite Formel geht in die erste über, wenn man den Sinn der x'_3 Axe umkehrt, was mit einer Spiegelung an der Ebene $x'_3 = 0$ übereinkommt. Abgesehen von dieser Spiegelung ist also \mathfrak{Z} durch Ω eindeutig bestimmt und folglich kann man dann F und Σ aus F und Σ ableiten.

§ 16. Man könnte von dem gewonnenen Resultate, wenigstens der Idee nach, eine Anwendung machen auf die Bestimmung der Gestalt eines Theiles der Erdoberfläche aus geodätischen Messungen. In der That liefern ja diese, von Basismessungen abgesehen, die Winkel zwischen den Verticalebenen eines Punktes. Wenn man dann, etwa durch Probiren, ein Modell F hergestellt hätte mit einem System Σ von Lothlinien, für das die Winkel der Verticalebenen ebenso gross wären, wie die auf der Erde beobachteten, so wäre man im Stande, die Beziehung der Gestalt der Erde zu diesem Modell anzugeben.

In der Praxis freilich geht dies nicht an. Bei der geringen Neigung gegen einander, welche die Lothlinien von

$$\omega(u, \tau) = 0 \quad \Omega(u, \tau) = 0$$

sind. Sind ferner λ und μ zwei durch n gehende reelle Ebenen, λ_i und μ_i ihre Coordinaten, so verlangt die Forderung, dass durch n zwei Ebenen gehen, welche ω und Ω gleichzeitig berühren (§ 14), dass

$$\Omega(\lambda\lambda) = c\omega(\lambda\lambda), \quad \Omega(\lambda\mu) = c\omega(\lambda\mu), \quad \Omega(\mu\mu) = c\omega(\mu\mu)$$

sei. Da die Ebenen λ und μ durch n gehen, ist die Bedingung dafür, dass n die Pole von τ in Bezug auf ω und Ω enthalte, durch die vier Gleichungen

$$\omega(\lambda\tau) = \omega(\mu\tau) = \Omega(\lambda\tau) = \Omega(\mu\tau) = 0$$

gegeben.

Setzen wir $\Omega(u) - c\omega(u) = W(u)$, so ist auch

$$W(\lambda\lambda) \quad W(\lambda\mu) \quad W(\mu\mu) \quad W(\lambda\tau) \quad W(\mu\tau) = 0.$$

Ist σ eine Ebene, die nicht durch den Schnitt von λ, μ und τ geht, und solche gibt es, da diese drei Ebenen nicht dieselbe Gerade enthalten, und multiplicirt man die Hesse'sche Determinante von W zweimal mit $\Sigma \pm \lambda_1 \mu_2 \tau_3 \sigma_4$, so entsteht Null. Daher ist W eine Grenzfläche nach der Bezeichnung von Hesse (Anal. Geom. des Raumes 3. Auflage Seite 173). Aus den drei ersten der letzten Gleichungen folgt noch

$$W(\lambda + p\mu, \lambda + p\mu) = 0$$

für beliebige p , also gehen durch den Schnitt von λ und μ unendlich viele Tangentenebenen der Grenzfläche, so dass n Tangente eines Kegelschnitts ist, wenn die Grenzfläche W nicht zerfällt. Da aber in dem Büschel $\Omega - c\omega$, wenn nicht alle Flächen Grenzflächen sind, höchstens zwei Grenzflächen vorhanden sind — ω und Ω selbst sind unbrauchbar, weil sie imaginäre Kegelschnitte enthalten — so liegen, wenn jene zwei Grenzflächen nicht zerfallen, ihre Tangenten, also die Normalen von F , in zwei Ebenen, was nicht möglich ist.

von ω sein oder umgekehrt oder die Ebenen von ω und Ω müssen zusammenfallen. Da die Transformation \mathfrak{T} reell ist und die Ebene von ω ebenfalls, so ist es auch die von Ω und somit ist der erste Fall nicht möglich. Im zweiten ist \mathfrak{T} affin, weil die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht.

Wenn dann ω und Ω nicht identisch sind, bilden die Ebenen, welche beide berühren, je nach der Lage von Ω gegen ω , 4, 3, 2 oder 1 Ebenenbüschel, deren Axen die gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte sind und in der unendlich fernen Ebene liegen. Die Normalen sind also dann Schnitte von zwei Ebenen aus zwei verschiedenen Büscheln. Die Tangentialebene τ muss den vier Gleichungen

$$\omega(\lambda u) = 0 \quad \omega(\mu u) = 0 \quad \Omega(\lambda u) = 0 \quad \Omega(\mu u) = 0$$

genügen, welche die Berührungspunkte der Ebenen λ und μ mit ω und Ω vorstellen. Sie ist also die unendlich ferne Ebene, wenn die Zahl der Berührungspunkte mindestens drei ist. Einen brauchbaren Fall erhalten wir daher nur, wenn die gewählten beiden Büschel zusammen nur zwei Berührungspunkte haben. Dies tritt weder ein, wenn ω und Ω vier gemeinsame Tangenten besitzen, noch wenn sie deren drei haben. Haben sie dagegen nur zwei Tangenten gemein, so können diese drei oder zwei Berührungspunkte haben. Nur den letzten Fall können wir benutzen, in dem sich dann ω und Ω doppelt berühren. Die Berührungssehne der beiden Tangenten ist dann Axe eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen Tangentenebenen sein können. Die Ebenen aus beiden Büscheln, deren Axen die gemeinsamen Tangenten sind, schneiden sich aber in einem unendlich fernen Punkte, d. h. alle Normalen sind parallel. Haben ω und Ω nur eine Tangente gemein, so wären λ und μ aus dem Büschel zu wählen, dessen Axe sie ist und n wäre eine unendlich ferne Gerade.

benötigte sich in der angegebenen Weise mit ein Zentralschwerpunkt verbinden, um zu einem Resultat zu gelangen. Das ist das wesentliche Resultat eines solchen Zentralschwerpunkts. Man muss sich aber auch der Tatsache bewusst sein, dass die relative Lage der Zentralschwerpunkte der Flächen die wichtigste sein. So sind die relativen Massenverhältnisse wichtig. Das ist die Eigenschaft dieser Flächen, nicht zu sein. Sind aber, wie gewöhnlich, auch mechanische Zusammenhänge über die Richtung der Zentralschwerpunkte mit der Zeit gegeben, wenn man sich in der beschriebenen Lage, so kann man diese mit dem Newton'schen Prinzip vergleichen. Wie man sieht, zeigen sich dann keine Unterschiede der Zusammenhänge. Zum Teil sind sie wichtig, wenn man sich mit der physikalischen Zusammenhänge beschäftigt, während man die Zusammenhänge mit dem Prinzip nicht mehr mit dem Prinzip vergleichen könnte. Wenn man die Wirkung der über dem Prinzip beschriebenen Massen mit der Zusammenhänge vergleicht, und diese danach vergleicht, kann man, wenn man sich damit beschäftigt, die Zusammenhänge mit dem Prinzip beschreiben. Wenn man sich dann noch Zusammenhänge mit der Zeit beschäftigt, so ist das ein Resultat, dass das Prinzip dem Prinzip nicht mehr durch diese Massen ist. Man kann dann, wenn man die Zusammenhänge beschreibt, sich die Zusammenhänge mit der Zeit und den verschiedenen Flächen vorstellen. Jeder Newton'sche Satz, der sich mit der Zeit beschäftigt, während die Zusammenhänge der Zusammenhänge mit der Zeit verglichen werden, und diese mit der Zeit verglichen werden. In der Zeit der Zusammenhänge vergleicht man die Zusammenhänge mit der Zeit, so kann man sich dann mit der Zeit beschäftigen.

Lichtbewegung in Metallen und findet im Gegensatze zu Maxwell, dass sie weniger absorbiert wird als es die Theorie verlangt. Wie er jedoch selbst erwähnt, beweisen die Erscheinungen der auswählenden Absorption, dass hier die diskontinuierliche Molekularstruktur der Materie von wesentlichem Einfluss ist. Da nun die elektrischen Eigenschwingungen der Moleküle offenbar nothwendig ebenfalls Veranlassung zur Absorption geben, so wäre die Thatsache, dass letztere ohne deren Berücksichtigung zu klein herauskommt, von vorne herein zu erwarten.

In neuester Zeit haben auch E. Wiedemann, Ebert¹⁾ und Hertz²⁾ auf die unerwartet grosse Durchlässigkeit dünner Metallschichten für Katedenstrahlen hingewiesen. Die beiden ersteren sagen bei dieser Gelegenheit: „Wir haben hier einen neuen Fall vor uns, welcher zeigt, dass die Maxwell'sche Theorie nicht ausreicht, die Erscheinungen zu erklären.“ Wahrscheinlich hat man es jedoch auch hier mit Schwingungen zu thun, deren Wellenlänge nicht mehr unendlich gross gegen die Molekulardimensionen ist und welche sich daher der Maxwell'schen Theorie von vorne herein entziehen, sodass deren Giltigkeit auf alle anderen Erscheinungen, für welche sie allein gemacht wurde, unangefochten bleibt.

Es folgt nun aus der Maxwell'schen Theorie, dass sehr rasche elektrische Schwingungen, wenn sie sich längs eines Drahtes fortpflanzen, auf dessen Oberfläche beschränkt bleiben; ferner, dass Wellen, deren Fortpflanzungsrichtung nicht wie im eben angeführten Falle parallel, sondern senkrecht zur Metalloberfläche steht (wie dies bei Lichtschwingungen der Fall ist, die senkrecht in Metall eindringen) innerhalb einer Wellenlänge bereits ganz enorm geschwächt werden. Aus dem letzteren Resultate folgt weiter, dass ächte Lichtschwingungen schon beim Durchwandern sehr dünner Metallschichten

1) Phys.-med. Soc. zu Erlangen 14. Dec. 1891.

2) Wied. Ann. 45 p. 28 1892.

(M. T. 607, E), worin

$$a = \mu \alpha, \quad b = \mu \beta, \quad c = \mu \gamma \quad \text{F)}$$

(M. T. 616, im Text unmittelbar vor Gleichung 1, B. V. art. 116)

$$4 \pi f = k P, \quad 4 \pi g = k Q, \quad 4 \pi h = k R \quad \text{C')}$$

(M. T. 608, F; denn die beiden dortigen Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{D} haben die Componenten P, Q, R und f, g, h ; vergl. auch M. T. 790, 16; statt Maxwell's Buchstaben K wurde k geschrieben.)

$$p = C P, \quad q = C Q, \quad r = C R \quad \text{D')}$$

(M. T. 609, G. Diese Gleichungen heissen bei Maxwell $\mathfrak{R} = C\mathfrak{E}$; p, q, r sind die Componenten von \mathfrak{R} ; vgl. M. T. 611, I*)

$$u = p + \frac{df}{dt}, \quad v = q + \frac{dg}{dt}, \quad w = r + \frac{dh}{dt} \quad \text{E)}$$

(M. T. 610, H*)

$$P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \quad Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy}, \quad R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \quad \text{G)}$$

(M. T. 598, B, worin $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, da das Medium ruht.)

§ 1. Einmalige Reflexion.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass nur eine Trennungsfläche vorhanden ist, welche wir als eben voraussetzen und zur $y z$ -Ebene wählen. Links von derselben auf der Seite der negativen Abscissen sei Luft, rechts ein Metall. Elektrische Planwellen sollen vom negativ Unendlichen gegen die Trennungsfläche anrücken. Hier werden sie theils reflectirt, theils dringen sie ins Metall ein; in letzterem existiren also nur Wellen, die in der Richtung der positiven Abscissen fortschreiten. Die Abscissenaxe ist die Fortpflanzungsrichtung, sodass alles nur Function von x und t ist. Die elek-

auch k_1 sollen dort von Null verschieden sein, so dass die allgemeinen Gleichungen A bis G gelten. Wir haben dort nur die durchgehende in der positiven x -Richtung fortschreitende, keine reflectirte Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass auch das Glied verschwindet, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält. Dann würden die für positive Abscissen geltenden Gleichungen erfüllt durch $f_1 = P_1 = h_1 = R_1 = 0$

$$q_1 = \frac{4\pi C_1}{k_1} g_1 = e^{-\xi x} E \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right)^{1)} \quad 4)$$

wobei

$$\xi^2 = -\frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4 k_1^3 \mu_1^2}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C_1^2 \mu_1^2}{\tau^2}} \quad 5)$$

$$\eta = \frac{4\pi^2 \mu_1 C_1}{\tau \xi}, \quad \eta^2 = \frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^2 k_1^3 \mu_1^2}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C_1^2 \mu_1^2}{\tau^2}}$$

wobei der Quadratwurzel der positive Werth beizulegen ist und auch für ξ und η deren positive Werthe zu setzen sind. Aus D' und G folgt wieder $H_1 = T_3$,

$$G_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) + T_4 \quad 6)$$

und aus A folgt $a_1 = \alpha_1 = b_1 = \beta_1 = 0$

$$c_1 = \mu_1 \gamma_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x} \left[\eta \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) - \xi \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) \right] \quad 7)$$

Durch Bildung von $\frac{d\gamma_1}{dx}$ und $\frac{dg_1}{dt}$ können wieder die Gleichungen B' und E noch verificirt werden.

Es handelt sich noch um die Grenzbedingungen für die

1) Siehe B. V. art. 96, pag. 101. Nach C' und D' können sich f , g , h von p , q respective r nur durch constante Factoren unterscheiden.

$$Q = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2} = \frac{2\sqrt{2u} + 2\sqrt{u^2 + v^2}}{1 + \sqrt{2u} + 2\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{u^2 + v^2}}$$

Bei den früher betrachteten Hertz'schen Schwingungen war $\mu = \mu_1$, $k = 1$, $C_1 \tau = v : 2 = 2 \cdot 10^7 L$. Wenn also selbst die Dielektricitätsconstante des Metall eine millionmal grösser als die der Luft wäre, so würden die für diesen Fall gefundenen Resultate kaum alterirt. Dagegen würde im Falle des Natriumlichts die Dielektricitätsconstante des Metalls schon einen kleinen Einfluss bekommen, wenn sie der der Luft gleich wäre. Der Verlauf noch viel rascherer Schwingung würde dann gänzlich verändert.

Die Gleichungen 5 zeigen, dass mit wachsendem k_1 sowohl die Dämpfungsconstante ξ als auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $2\pi : \eta \tau$ nur abnehmen kann. Habe ξ , wenn alles sonst unverändert bleibt, nur $k_1 = 0$ ist, den Werth ξ_0 , so hat man nämlich $\xi_0^4 = \xi^4 + 4\pi^2 k_1 \mu_1 \xi^2 : \tau^2$.

Wenn entgegen dem zuerst betrachteten Falle das k_1 enthaltende Glied gross gegen das C_1 enthaltende ist, so wird:

$$\xi = 2\pi C_1 \sqrt{\frac{\mu_1}{k_1}}, \quad \frac{2\pi}{\eta \tau} = \frac{1}{\sqrt{k_1 \mu_1}}, \quad Q = \frac{4\sqrt{\mu \mu_1 k k_1}}{(\sqrt{\mu k_1} + \sqrt{\mu_1 k})^2}$$

$$A = \left(\frac{k}{k_1} + \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}} \right) \frac{E k_1}{8\pi C_1}, \quad C = \left(\frac{k}{k_1} - \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}} \right) \frac{E k}{8\pi C_1}$$

$$B = -D = \frac{\tau E}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}$$

Nun schreiten wir zur Erledigung des 3. Punktes.

§ 2. Betrachtung einer planparallelen Metallplatte.

Seien die Ebenen $x = -p$ und $x = 0$ die beiden Begrenzungsflächen einer Metallplatte. Die im Innern der Metallplatte gültigen Werthe sollen den Index 1 erhalten. Links auf Seite der negativen Abscissen (wofür kein Index angewendet wird und rechts von der Metallplatte (Index 2 für die variablen Grössen) sei dasselbe Dielectricum Luft. Von links sollen Planwellen anrücken, welche an beiden Metalloberflächen reflectirt werden. Rechts von der yz -Ebene ist dann keine reflectirte, nur die durchgedrungene Welle vorhanden. Die übrigen Verhältnisse sollen wie im vorigen Paragraph sein. Dann ist also für $-p < x < 0$:

$$g = A \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - x \sqrt{\mu k}) + B \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - x \sqrt{\mu k}) + \\ + C \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + x \sqrt{\mu k}) + D \cos \frac{2\pi}{\tau} (t + x \sqrt{\mu k}).$$

$$c = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} \left[A \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - x \sqrt{\mu k}) + B \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - x \sqrt{\mu k}) - \right. \\ \left. - C \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + x \sqrt{\mu k}) - D \cos \frac{2\pi}{\tau} (t + x \sqrt{\mu k}) \right].$$

Für $-p < x < 0$

$$q_1 = e^{-\xi x} \left[E \sin \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \eta x \right) + F \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \eta x \right) \right] + \\ + e^{\xi x} \left[G \sin \left(\frac{2\pi}{\tau} t + \eta x \right) + H \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t + \eta x \right) \right]$$

$$G_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1} \left\{ e^{-\xi x} \left[E \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \eta x \right) - F \sin \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \eta x \right) \right] + \right. \\ \left. + e^{\xi x} \left[G \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t + \eta x \right) - H \sin \left(\frac{2\pi}{\tau} t + \eta x \right) \right] \right\}$$

$$c_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1} \left\{ e^{-\xi x} \left[(E\eta + F\xi) \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (-E\xi + F\eta) \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right) \right] + \right. \\ \left. + e^{\xi x} \left[(-G\eta - H\xi) \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (G\xi - H\eta) \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right) \right] \right\}.$$

Endlich für $x > 0$ haben wir nur die durchgehende in der positiven x -Richtung fortschreitende Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass das Glied, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält, verschwindet. Dann wird also für $x > 0$

$$g_2 = J \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - x\sqrt{\mu k}), \quad c_2 = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} J \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - x\sqrt{\mu k}).$$

Die Bedingungsgleichungen für $x = 0$ lauten:

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{4\pi}{k} \frac{g_2}{\tau}, \quad \frac{c_1}{\mu_1} = \frac{c_2}{\mu},$$

was liefert:

$$H = -F, \quad G = E - 2\frac{\eta}{\xi}F, \quad E - \frac{\eta}{\xi}F = \frac{2\pi C_1 J}{k} \\ F = -H = \frac{4\pi^2 \mu_1 C_1 \xi J}{(\xi^2 + \eta^2) \tau \sqrt{\mu k}}, \quad E = \frac{2\pi C_1 J}{k} + \frac{4\pi^2 \mu_1 C_1 \eta J}{(\xi^2 + \eta^2) \tau \sqrt{\mu k}} \\ G = \frac{2\pi C_1 J}{k} - \frac{4\pi^2 \mu_1 C_1 \eta J}{(\xi^2 + \eta^2) \tau \sqrt{\mu k}}.$$

Setzen wir

$$\cos \frac{2\pi p}{\tau} \sqrt{\mu k} = a, \quad \sin \frac{2\pi p}{\tau} \sqrt{\mu k} = \alpha, \quad \cos p\eta = b, \quad \sin p\eta = \beta, \\ e^{\xi p} = \gamma,$$

so liefern die Bedingungsgleichungen für $x = 0$ die Gleichungen für p :

$$Aa - B\alpha + Ca + D\alpha = \frac{k}{4\pi C_1} \left(Eb\gamma - F\beta\gamma + \frac{Gb}{\gamma} + \frac{H\beta}{\gamma} \right)$$

$$A\alpha + Ba - C\alpha + D\alpha = \frac{k}{4\pi C_1} \left(E\beta\gamma + Fb\gamma - \frac{G\beta}{\gamma} + \frac{Hb}{\gamma} \right)$$

$$Aa - B\alpha - Ca - D\alpha = \frac{\tau \sqrt{\mu k}}{8\pi \mu_1 C_1} \left[E\gamma(b\eta + \beta\xi) + \right. \\ \left. + F\gamma(b\xi - \beta\eta) + \frac{G}{\gamma}(-b\eta + \beta\xi) - \frac{H}{\gamma}(b\xi + \beta\eta) \right]$$

$$A\alpha + Ba + C\alpha - D\alpha = \frac{\tau \sqrt{\mu k}}{8\pi^2 \mu_1 C_1} \left[E\gamma(-b\xi + \beta\eta) + \right. \\ \left. + F\gamma(b\eta + \beta\xi) + \frac{G}{\gamma}(b\xi + \beta\eta) + \frac{H}{\gamma}(-b\eta + \beta\xi) \right].$$

Wir wollen $J=1$ setzen, wodurch nur sämtliche Amplituden mit einem constanten Factor multiplicirt werden; ferner setzen wir zur Abkürzung

$$2\delta = \gamma + \frac{1}{\gamma} = e^{p\xi} + e^{-p\xi}, \quad 2\varepsilon = \gamma - \frac{1}{\gamma} = e^{p\xi} - e^{-p\xi},$$

dann wird:

$$Aa - B\alpha + Ca + D\alpha = b\delta + \frac{b\varepsilon\eta - \beta\delta\xi}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{2\pi\mu_1}{\tau} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$A\alpha + Ba - C\alpha + D\alpha = \beta\varepsilon + \frac{b\varepsilon\xi + \beta\delta\eta}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{2\pi\mu_1}{\tau} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$Aa - B\alpha - Ca - D\alpha = b\delta + (b\varepsilon\eta + \beta\delta\xi) \cdot \frac{\tau}{2\pi\mu_1} \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$$A\alpha + Ba + C\alpha - D\alpha = \beta\varepsilon + (-b\varepsilon\xi + \beta\delta\eta) \cdot \frac{\tau}{2\pi\mu_1} \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach: 1. mit a , α , a , α ; 2. mit $-\alpha$, a , $-\alpha$, a ; 3. mit a , $-\alpha$, $-\alpha$, α ; 4. mit α , a , $-\alpha$, $-\alpha$ und setzt noch zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\tau}{4\pi\mu_1} \sqrt{\frac{\mu}{k}} + \frac{\pi\mu_1}{\tau(\xi^2 + \eta^2)} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \\ \lambda &= \frac{\tau}{4\pi\mu_1} \sqrt{\frac{\mu}{k}} - \frac{\pi\mu_1}{\tau(\xi^2 + \eta^2)} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \end{aligned}$$

so erhält man

$$A = a b \delta + \alpha \beta \varepsilon + (a b \varepsilon + \alpha \beta \delta) \eta \kappa + (a \beta \delta - \alpha b \varepsilon) \xi \lambda$$

$$B = a \beta \varepsilon - \alpha b \delta + (a \beta \delta - \alpha b \varepsilon) \eta \kappa - (a b \varepsilon + \alpha \beta \delta) \xi \lambda$$

$$C = (\alpha \beta \delta - a b \varepsilon) \eta \lambda - (a \beta \delta + \alpha b \varepsilon) \xi \kappa$$

$$D = - (a \beta \delta + \alpha b \varepsilon) \eta \lambda + (a b \varepsilon - \alpha \beta \delta) \xi \kappa$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (b^2 \varepsilon^2 + \beta^2 \delta^2) (\eta^2 \kappa^2 + \xi^2 \lambda^2) + 2 \delta \varepsilon \eta \kappa + \\ &\quad + 2 b \beta (\delta^2 - \varepsilon^2) \xi \lambda + b^2 \delta^2 + \beta^2 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$C^2 + D^2 = (b^2 \varepsilon^2 + \beta^2 \delta^2) (\eta^2 \lambda^2 + \xi^2 \kappa^2).$$

Sobald die Metallplatte sehr dünn, also p sehr klein ist, wird

$$a = b = \delta = 1, \quad \alpha = \beta = \varepsilon = 0,$$

daher

$$A = 1, \quad B = C = D = 0,$$

es werden also die Wellen durchgelassen, als ob die Metallplatte nicht vorhanden wäre (Fall 1). Ein anderer extremer Fall (2) tritt ein, wenn $\xi\lambda$ und $\kappa\eta$ (wenigstens eine dieser beiden Grössen) sehr gross ist. Dann verschwindet das erste Glied im Ausdruck für A sowie in dem für B und man hat $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$. Alle Bewegung wird reflectirt.

Man kann die Frage aufwerfen, wie dünn in diesem letzten Falle bei gegebener Schwingungsdauer die Metallplatte sein müsse, damit der Uebergang in das zuerst genannte Extrem eintrete.

Wir wollen da wieder bloss den Fall betrachten, dass die dielektrischen Eigenschaften der Metallschicht nicht in Betracht kommen, also k_1 verschwindet. Dann wird, wie

$$\text{wir sahen, } \xi = \eta = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}.$$

Wir setzen ferner $\mu = \mu_1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \alpha \eta = \alpha \xi &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1 \tau}{k}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{k}{C_1 \tau}}, \\ \lambda \xi = \lambda \eta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1 \tau}{k}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{k}{C_1 \tau}}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird sehr gross, wenn $\sqrt{\frac{C_1 \tau}{k}}$ sehr gross oder sehr klein ist. Im ersteren Fall, der, wie aus den numerischen Beispielen des vorigen Paragraphen ersichtlich ist, bei den Hertz'schen Schwingungen eintritt, wird $\alpha \xi = \lambda \xi$.

Da

$$\frac{\arccos b}{\arccos a} = \sqrt{\frac{C_1 \tau}{k}},$$

so wird in diesem Falle auch dieses Verhältniss sehr gross, und daher α noch viel kleiner, als β sein, dessen Kleinheit die Grösse von $\eta \alpha$ und $\xi \lambda$ zu compensiren hat. a und b können gleich eins gesetzt werden. Wir verbinden hiemit den Fall 1, dass fast alles Licht durchgeht, wenn p so klein ist, dass $\varepsilon = p \xi = 2 \pi p \sqrt{\frac{C_1 \mu}{\tau}}$ klein gegen 1, $\delta = 1$ wird.

Setzt man dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen im Medium zu beiden Seiten der Metallschicht (Luft) $\frac{1}{\sqrt{\mu k}} = V$, so ist

$$A = 1 + 2 \pi p \frac{C_1}{k V}, \quad C = -2 \pi p \frac{C_1}{k V}, \quad B = D = 0.$$

Wenn $p \xi$ gross ist, also nur wenig Licht hindurchgeht, so wird:

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{2} e^{2 p \xi} (\xi^2 \alpha^2 + \xi \alpha), \quad C^2 + D^2 = \frac{\xi^2 \alpha^2}{2} e^{2 p \xi}.$$

Numerische Berechnungen nach dieser Formel, ähnlich wie wir sie an die Formel des vorigen Paragraph geknüpft haben, stossen natürlich nicht auf die mindeste Schwierigkeit. Eine experimentelle Prüfung der Durchlässigkeit äusserst dünner Schichten aus schlecht leitenden Metallen oder anderen Leitern für Licht und elektrische Schwingungen könnten vielleicht Aufschlüsse über deren Dielektricitätsconstante liefern.

Auch die Berechnung des entgegengesetzten Falles, dass die Schwingungen so rasch geschehen, dass $\frac{C_1 \tau}{k}$ sehr klein ist (Kathodestrahlen?), hat keine Schwierigkeit, doch gehe ich darauf nicht weiter ein, da diese Phänomene wohl durch den specifischen Einfluss der Resonanz der einzelnen Moleküle zu sehr gestört werden dürften.

Ansicht scheint durch die vorliegende Arbeit, die experimentelle Beiträge liefern soll über den Zusammenhang des Magnetismus des Eisens und der Schwingungszahl der magnetisirenden Wechselströme, an Wahrscheinlichkeit zu gewinnen.

Rasch alternirende Ströme kann man erhalten, wenn man Batterien sich durch eine Leitungsbahn von genügend grossem Selbstinduktionscoefficienten entladen lässt. Die Schwingungszahl des Entladestroms kann durch Untersuchung des Entladefunkens im rotirenden Spiegel experimentell bestimmt werden. Sie ist abhängig von der Capacität der Batterie und der Selbstinduktion der Leitungsbahn. Würde man eine Batterie abwechselnd durch eine Leitungsbahn aus Kupfer und Eisen entladen, so hätte man eine Methode, um eine Verschiedenheit der beiden Selbstinduktionscoefficienten, und dadurch ein Maass für den Magnetismus des Eisendrahtes, zu bestimmen, die nur an dem Uebelstande leidet, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit des Spiegels, deren genaue Messung äusserst schwierig ist, quadratisch eingeht. Diesem Uebelstande wurde durch die folgende Versuchsanordnung abgeholfen.

Es wurden gleichzeitig 2 möglichst gleiche Batterien benutzt, deren etwaige Ungleichheit durch Vertauschen eliminirt wurde. Die Entladekreise der beiden Batterien hatten möglichst gleiche geometrische Configuration, doch war der eine aus Kupferdraht, der andere aus einem weichen Eisendraht von gleichem Querschnitte hergestellt. Beide Batterien wurden gleichzeitig bis zum gleichen Potential geladen, in demselben Moment entladen, die beiden Funken gleichzeitig in einem rotirenden Spiegel zerlegt und die Funkenbilder auf einer photographischen Platte fixirt. Die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels braucht dann nur so genau bestimmt zu werden, um ein Maass für die Grösseanordnung der Stromwechselzahl zu erhalten. Denn die Ausmessung der photographischen Bilder lässt Unterschiede der Schwingungs-

diese Widerstände wenigstens für konstanten Strom auszugleichen. Das wurde so erreicht, dass in der Kupferleitung ein dünner Nickelindraht, in die Eisenleitung ein gleicher Kupferdraht eingeschaltet wurde. Diese dünnen Drähte waren so gewickelt, dass ihre Selbstinduktionscoefficienten möglichst klein wurden, und ihre Längen wurden so genommen, dass die Widerstände ausgeglichen waren. Es ergab sich dann:

$$T = 0,00000215; \quad 0,00000791; \quad 0,0000190; \quad 0,0000380''$$

$$\frac{L_F}{L_C} = \begin{matrix} 1,19 & 1,22 & 1,18 & 1,40 \\ \text{(Mittel aus 12 Platten)} & \text{aus 23 Platten} & \text{aus 18 Platten} & \text{aus 12 Platten.)} \end{matrix}$$

Eine Aenderung des Verhältnisses des Coefficient L ist also nicht eingetreten. Die Zahl 1,22 scheint die oben erwähnte Vermuthung zu bestätigen, dass die Zahl 1,36 in 1) zu gross ist.

3) Die Stromschwingungen bei diesen Batterieentladungen finden mit abnehmender Amplitude statt, bestimmt durch die Selbstinduktion und Widerstand der Leitungsbahn (bei gleicher Capacität der Batterien). Bei den hier angestellten Versuchen zeigten die beiden Leitungsbahnen gänzlich verschiedene Dämpfungsverhältnisse. Benutzt man stets die gleiche Plattensorte, so werden die Schwingungen nicht mehr photographisch wirken, sobald ihre Amplitude unter einen gewissen Werth gesunken ist. Die Anzahl der photographirten Schwingungen auf der Platte giebt einen Maassstab für die Dämpfung derselben. Es ergeben sich bei

$$T = 0,00000215; \quad 0,00000791; \quad 0,0000190; \quad 0,0000380''$$

Halbe Schwingungen

bei Cu	bei unausgeglichenen Widerständen des Stromkreises	20	29	22	21
, Fe		11	8	5	5
bei Cu	bei ausgeglichenen Widerständen der Stromkreise	12	17	13	20
, Fe		11	7	5	5

(Diese Zahlen sind Mittelwerthe der schon oben angegebenen Plattenzahl; bei den verschiedenen Platten zeigten diese Zahlen nur sehr geringe Differenzen.)

A. Funken in der Kupferleitung. B. Funken in der Eisenleitung.

Verhältnisse der Selbstinduktionskoeffizienten = 1.44

Verhältnisse der Anzahl Schwingungen = $\frac{21}{6}$

Fig. II

$$T = 0,00000701 = \frac{1}{142857}.$$

A. Funken in der Kupferleitung. B. Funken in der Eisenleitung.

Verhältnisse der Selbstinduktionskoeffizienten = 1.25

Verhältnisse der Anzahl Schwingungen = $\frac{27}{7}$

Fig. III

$$T = 0,00000215 = \frac{1}{465116}.$$

A. Funken in der Kupferleitung. B. Funken in der Eisenleitung.

Verhältnisse der Selbstinduktionskoeffizienten = 1.15

Verhältnisse der Anzahl Schwingungen = $\frac{20}{13}$

lich an die Betrachtungen anreihen, mit denen Listing seine „Vorstudien zur Topologie“ abschliesst.

3. Verkettet mit einander sind Ringe dann, wenn die Weite, bis zu welcher sie von einander entfernt werden können, von ihren Dimensionen abhängt. Wenn eine Anzahl Ringe eine Kette bilden, so kann keiner vom andern über jede Weite hinaus entfernt werden, ohne dass mindestens einer von allen Ringen über jede Länge hinaus gedehnt würde, und es müssen, wenn man die Dimensionen der Ringe hinlänglich verkleinert, sämtliche Ringe auf einen beliebig kleinen Raum zusammengezwungen werden.

4. Bildet ein Theil der Ringe einer Kette K , allein für sich betrachtet, ebenfalls eine Kette k , so heisse k eine Unterkette von K .

5. Nachdem der Begriff von verketteten Ringen dargestellt ist, lässt sich der von verketteten Ringketten leicht daraus ableiten.

6. Im Gegensatz zu Gebilden, die mit einander verkettet sind, sprechen wir von unverketteten oder „von einander freien“ Gebilden.

7. Unter der Beschreibung des Verkettungszustandes von n Ringen verstehe ich die genaue Angabe der Ketten, welche durch die Ringe gebildet werden, und der sämtlichen in ihnen enthaltenen Unterketten. Diese Beschreibung wird durch ein jetzt zu bildendes Schema geleistet.

8. Man setze in eine erste Zeile die Namen der Ringe nebeneinander, etwa

$$1) \quad R_1, R_2, R_3 \dots R_{n-1}, R_n$$

Dann bilde man die sämtlichen Combinationen dieser Buchstaben zu zweien und untersuche, welche dadurch dargestellten Ringpaare, für sich allein betrachtet, mit einander verkettet sind, welche nicht. Die Bezeichnungen der ver-

in das zweite Drittel: Die Glieder, welche Unterketten enthalten, ausserdem aber noch eine Gruppe G von Buchstaben, welche zusammen keine Unterkette bilden: in das dritte Drittel: Die Glieder, welche gar keine Unterketten enthalten.

17. Die ersten Drittel der sämtlichen rechten Zeilenhälften seien als erstes Drittel der rechten Schemahälfte bezeichnet, und entsprechend seien die Benennungen zweites und drittes Drittel zu verstehen.

18. Die Zeilendrittel halte man durch kleinere Vertikalstriche auseinander, oder man bilde, wie in dem Beispiel geschehen, gleich drei durchgehende Kolumnen von der 3. Zeile an. Sollten gewisse Drittel gar keine Glieder enthalten, so wird es doch gut sein, trotzdem die Trennungsstriche zu setzen.¹⁾ In dem Beispiel 11 enthält nur Zeile 5) Ketten in allen drei Dritteln der rechten Hälfte, Zeile 3) nur zweites und drittes Drittel, Zeile 4) nur ein drittes Drittel, Zeile 6) nur die zwei ersten Drittel. Für die Ketten der ersten zwei Drittel ist durch die untergeschriebenen Summen angedeutet, aus welchen Unterketten und Buchstabengruppen G sie zusammengesetzt sind.

II. Bildung von Ketten, deren Schema ein gegebenes ist.

19. Man würde sich den Gegenstand dieses Aufsatzes zu einfach vorstellen und den Zweck der Aufstellung eines so allgemeinen Schema's nicht einsehen, so lange man nur an die gewöhnlich sich darbietende Art der Verkettung denken wollte. Die gewöhnlichsten Ketten haben ein Schema, dem abgesehen von Zeile 2) die rechte Hälfte ganz fehlt. Unser Begriff der Verkettung ist aber ein viel weiterer, und es kann das Zusammenhängen

¹⁾ Ähnliches gilt für die Trennungsstriche der Hälften.

Aufschneiden des einen von beiden wieder von einander freimachen kann.

23. Auffälliger ist schon die Möglichkeit, 3 Ringe so ineinander zu verflechten, dass kein Paar derselben verkettet ist, sondern alle drei Ringe frei werden, sobald ein beliebiger aufgeschnitten wird.

Tait gibt ein Beispiel für diese Möglichkeit, welches wir in Fig. 2 reproduciren.¹⁾

24. Wir sind nun weiter gegangen und haben in Fig. 4 und Fig. 5 Taf. II Ketten von 4, resp. 5 Ringen gebildet, welche ganz entsprechende Eigenschaften zeigen, d. h. sofort vollständig zerfallen, sobald irgend einer der Ringe aufgeschnitten wird.

Ja, es lässt sich allgemein folgender, auf den ersten Blick sehr unwahrscheinliche Satz behaupten:

25. Es lassen sich beliebig viele Ringe R so zu einer Kette K verbinden, dass in K gar keine Unterketten vorhanden sind. Zerschneidet man einen einzigen ganz beliebigen der Ringe R , so werden sofort sämtliche R frei von einander.

26. Nachdruck ist darauf zu legen, dass das Zerfallen bei der Zerschneidung eines ganz beliebigen der Ringe eintritt, denn Beispiele für Ketten aus n Ringen, die bei Zerschneidung eines bestimmten Ringes in ihre Elemente zerfallen, liegen auf der Hand: Man denke sich nur beliebig viele Ringe auf einen andern aufgereiht, wodurch eine Kette entsteht, deren rechte Schemahälfte die Form

$$1) \quad A, B, C \dots N$$

$$2) \quad A B, A C \dots A N$$

hat, und welche beim Zerschneiden des Ringes A , aber keines andern in ihre Elemente zerfällt.

¹⁾ Siehe Citat bei 2.

dass er auf der nemlichen Seite von A_5 bleibt. In Fig. 8 fand zwischen zwei Ueberkreuzungen $x_{2\nu+1}$ und $x_{2\nu+2}$ ein Umfängen, Unterqueren von A_5 durch A_1 statt; an dessen Stelle tritt jetzt sozusagen ein „Reiten“ von A_1 auf A_5 zwischen zwei Paaren von Ueberkreuzungen $x_{4\nu+1}, x_{4\nu+2}$ und $x_{4\nu+3}, x_{4\nu+4}$, indem A_1 auf jeder Seite von A_5 eine Schleife herabhängen lässt. In Fig. 9 befindet sich ferner allgemein bei x_{2n-1} und x_{2n} A_1 auf der nemlichen Seite von A_5 wie in Fig. 8 bei x_n .

32. Nun zu A_6 ! Mit diesem Ring bildet A_1 geradeso viel Ueberkreuzungen wie mit A_5 und wir nennen die Ueberkreuzungen gleicher Ordnungszahl auf A_5 und A_6 entsprechende. Die Ueberkreuzungen entstehen, indem A_6 jede der von A_5 herabhängenden Schleifen einmal durchbohrt. A_1 befindet sich daher, gerade im Gegensatz zu dem Verhalten entsprechender Ueberkreuzungen auf A_5 , auf verschiedenen Seiten von A_6 , wenn man eine Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl und die rechts folgende ins Auge fasst.

Ferner:

33. Bezeichnet man das Vornlaufen von A_1 bei einer Ueberkreuzung mit v , das Hintenlaufen mit h , so entspricht jeder Reihe von Ueberkreuzungen eine Reihe von Buchstaben v, h , und es gilt die Regel: Einer Buchstabenfolge $vv\ hh$ resp. $hh\ vv$ auf A_5 muss eine symmetrische Buchstabenfolge auf A_6 entsprechen, also entweder $v\ h\ h\ v$ oder $h\ v\ v\ h$.

Schliesslich:

34. Symmetrieen von Buchstabenfolgen auf A_5 müssen in den entsprechenden Buchstabenfolgen von A_6 erhalten bleiben.

35. Durch die unter 30–34 gegebenen Regeln sind nun auf A_6 die Ueberkreuzungen vollständig bestimmt bis auf eine beliebige, die zu Anfang willkürlich gewählt werden

Selbstverständlich ist das Zerfallen, wenn der zerschnittene Ring gerade A_1 ist.

Zerschneidet und entfernt man den äussersten Ring, so kann A_1 , weil es auf den übrigen Ringen nur „reitet“, einfach von ihnen abgehoben werden, wie ein Reiter vom Ross.

Zerschneidet und entfernt (= „löscht“) man den zweiten Ring von aussen, so kann man alle Schleifen, mit denen A_1 auf diesem Ringe „ritt“, nach unten fallen lassen, wofür die von der Mitte dieser Schleifen ausgehenden Symmetrieen von Wichtigkeit sind, und findet dann den äussersten Ring nirgends mehr unterquert. Daher steht dem Abheben des Ringes A_1 , der auf den Ringen innerhalb des zerschnittenen nur reitet, nichts im Wege.

Löscht man den dritten Ring von aussen, so werden die auf diesem reitenden Schleifen frei, und lassen sich, wieder in Folge der Symmetrieen, die in den zwei äusseren Ringen von ihren Mitten ausgehen, durch einfaches Abwickeln resp. Durchschieben ganz aus denselben herausflechten. Auf den weiter innen liegenden Ringen findet wieder nur ein Reiten statt und dem Abheben von A_1 steht nichts im Wege.

39. Ueberhaupt: Löscht man einen beliebigen der concentrischen Ringe, so besteht die sichtbarliche Freimachung des Ringes A_1 von den übrigen nach Richtung der äussern in einem Abwickeln und Durchschieben der Schleifen, welche auf dem zerschnittenen Ringe geritten waren, nach Richtung der innern Ringe in einem Abheben. Die erste Operation ist stets wesentlich bedingt durch die von der Mitte jener Schleifen ausgehenden Symmetrieen der Ueberkreuzungsbuchstaben, welche die Ueberkreuzungen stets paarweise aufzuheben gestatten.

Dass nach Ausflechtung von A_1 die übrigen Ringe alle frei sind, ist von selbst klar. .

40. Wir werden nun keine Schwierigkeit haben, auch die Möglichkeit des folgenden einzusehen:

oben 41) und somit für die anfangs vorhandenen Verkettungen, die sich nur auf einen Theil der Ringe beziehen, völlig belanglos ist.

43. Das geschilderte Verfahren reicht vollkommen aus, um bei beliebig gegebenem Schema eine dementsprechende Kette zu bilden. Man bilde der Reihe nach die in der rechten Schemahälfte vorkommenden Unterketten, die der linken Hälfte entstehen dann von selbst. Die Möglichkeit, dass Ringe oder Unterketten zu einer Kette zusammentreten, nachdem sie schon zur Bildung anderer Ketten verwendet und in denselben befangen sind, stört in keiner Weise. Es macht also gar nichts, dass z. B. nach zwei Ketten $a b c d$ und $e f g h$ eine Kette $a c f g$ im Schema auftreten kann. Nur ein Paar Worte sind oben in 42 zu verändern, um die dortigen Schlussfolgerungen auch auf diesen Fall anzuwenden.

Andre Methoden, um speciell Ketten ohne Unterketten zu bilden.

44. Da speciell die Ketten ohne Unterketten, welche unter 25. erwähnt sind, einiges Interesse erwecken dürften, so sollen noch zwei andre Methoden angegeben werden, um solche Ketten zu bilden.

45. Man denke sich auf eine Ebene einen kreisförmigen Ring B gelegt, darüber einen ebensolchen Ring A , so dass die beiden Kreisflächen sich zum grössten Theile überdecken, und A etwas mehr nach links liegt. Dann schlage man — die Ebene wird weggedacht — den Theil des Ringes A , der innerhalb des Umfanges von B liegt, nach unten und links, den Theil von B , der innerhalb A liegt, nach oben und rechts, so werden A und B nach dem Muster von Fig. 11 zusammengesetzt sein. Operation wie Resultat wollen wir mit dem Symbol $[A B]$ bezeichnen. $[A B]$ bildet keine Kette, sondern die beiden Ringe sind frei von einander.

der einerseits durch die Stränge von S_1 , andererseits durch die von S_2 begrenzt wird.

51. Keiner der behandelten Systemringe bildet eine Kette; sie bestehen aus lauter freien, nur in eigenthümlicher Weise zusammengelegten Ringen.

Sobald jedoch durch die Hauptöffnung eines solchen Systemringes S ein Ring oder anderer Systemring T geführt wird in der Weise, dass eine Verkettung stattfinden würde, sobald an Stelle von S und T einfache Ringe träten — am einfachsten also nach Muster von Fig. 3 —, so sind auf einmal sämtliche Ringe mit einander verkettet und zwar liegt dann eine Kette ohne Unterkette vor. Der Schlussring versperrt sämtlichen Ringen die Wege, auf denen sie aus den andern hervorgezogen und von ihnen frei gemacht werden könnten. Man überzeuge sich durch Experimente und erinnere sich an 21.

52. Dass ein vollständiges Zerfallen eintritt, sobald ein Ring R_1 in einem der Systemringe, sagen wir in S_1 , zerschnitten wird, lässt sich folgendermaassen klar machen:

Innerhalb S ist R_1 jedenfalls mit einem andern Ring oder Systemring R_2 nach Muster von Fig. 11 zusammengelegt, später eventuell noch gefaltet worden. Führen wir den Schnitt an R_1 in der Nähe von p ,¹⁾ so lässt sich dort der Systemring auseinanderzerren, ganz gleichgültig, welche Verbindungen er noch mit andern Ringen eingegangen ist, und verhält sich in Folge dessen in Bezug auf seinen Hauptdurchgang r nicht mehr wie ein Ring, sondern wie ein zweiendiger Faden. $[R_1 R_2]$ war wieder mit einem andern Ring oder Systemring R_3 zu einem Systemring zusammengelegt worden, der sich nach der mit $[R_1 R_2]$ vorgegangenen Veränderung selbst wie ein zweiendiger Faden verhält; etc. etc.

1) Nur der bequemerer Vorstellung wegen; die Stelle, wo der Schnitt geführt wird, ist gleichgültig.

aus, und um sie zu untersuchen, müssten wir über den Rahmen dieses Aufsatzes hinausgehen. Wir schreiten daher zu einer andern charakteristischen Zahl fort.

57. Vorausschickend bemerken wir, dass unter einem Querschnitt ein Schnitt verstanden werden soll, der einem Faden seine ringförmige Natur nimmt, und ihn in einen solchen mit zwei Enden verwandelt.

58. Man kann sich nun fragen: Welches ist die geringste Anzahl von Querschnitten, welche man an den gedachten Ringen ausführen muss, um dieselben sämmtlich von einander frei zu machen?

59. Und andererseits: Welches ist die grösste Anzahl von Querschnitten, die man zur Zerfällung der Ketten in ihre Bestandtheile ausführen kann unter der Bedingung, dass nie ein bereits freigewordener Ring zerschnitten wird?

60. Wir nennen die erste Zahl kurz die Minimalzerschneidungszahl, die zweite die Maximalzerschneidungszahl unseres Ringsystems.

Ableitung der Zerschneidungszahlen für eine specielle Art von Ketten.

61. Wir behandeln zunächst die Zerschneidungszahlen solcher Ketten, in deren Schema die linke Hälfte vollständig fehlt.

Ein solches Schema enthält kein einziges Glied, dessen Vorhandensein aus Gliedern, die in vorhergehenden Zeilen angeschrieben sind, nothwendig folgen würde, wie etwa aus zwei Gliedern AB und BC der zweiten Zeile nothwendig ein Glied ABC für die dritte Zeile sich ergibt.

62. Wenn zwei in einem solchen Schema vorkommende (Ketten resp.) Unterketten Ringe gemeinsam haben, so muss eine derselben sämmtliche Ringe der andern enthalten, mit

vollständig frei sind. Die Minimalzerschneidungszahl ist also hier gleich der Anzahl der Glieder des dritten Drittels:

$$\mu = \delta_3.$$

66. Um eine deutlichere Einsicht von der Richtigkeit dieses Satzes zu bekommen, könnte man den Einfluss der successiven Schnitte auf den Verkettungszustand des Ringsystems verfolgen, was wir aber hier der Kürze halber übergehen.

Maximalzerschneidungszahl M .

67. Bei Ableitung der Maximalzerschneidungszahl wird ein Umstand wichtig, der bei Ableitung der Minimalzerschneidungszahl belanglos war: Die Reihenfolge der Schnitte.

68. Sind M Ringe gefunden, bei deren Zerschneidung in bestimmter Reihenfolge das Ringsystem erst mit dem M -ten Schnitte in seine Elemente zerfällt, so gibt es sicher andre Reihenfolgen, bei deren Einhalten dieses Zerfallen vor dem M -ten Schnitte eintritt.

69. Jedenfalls lässt sich aus den M Ringen ein System von δ_3 Ringen herausheben, das mit jeder im dritten Drittel stehenden Kette nur je einen Ring gemein hat. δ_3 ist dann die Minimalzerschneidungszahl μ , s. den Schluss des vorigen Abschnittes, und das ganze System zerfällt schon nach dem μ -ten Schnitte, wenn man gerade die herausgehobenen μ Ringe zuerst aufschneidet.

70. Die $M - \mu$ übrigen Ringe können offenbar nicht in Ketten des dritten Drittels vorkommen, da sonst mindestens in einer derselben zwei Ringe aufgeschnitten würden. Dies hiesse aber, einen bereits ganz freigewordenen Ring aufschneiden (s. 63. 3)), was ausgeschlossen sein soll (s. 59). Es müssen daher Ringe sein, deren erstes Auftreten im zweiten Drittel erfolgt, als zu Gruppen G gehörig (s. 16). Schneidet man einen solchen Ring auf, so zerfällt die be-

Umwege vermeiden lassen, und scheint im Uebrigen auf das Durchprobiren der verschiedenen Möglichkeiten angewiesen.

75. Zunächst ist für die Aufsuchung von μ wichtig, dass das ganze System dann und erst dann in seine Bestandtheile zerlegt ist, wenn die Glieder des letzten Drittels zweiter Hälfte im Schema in die ihren zerfällt sind. Es handelt sich also darum, diese Glieder durch möglichst wenig Schnitte vollständig zu zerfällen.

76. Geht man die Glieder des letzten Drittels durch und sucht eine Anzahl solcher heraus, welche aus lauter verschiedenen Buchstaben bestehen, es seien die Glieder $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\nu$, so ist ν eine untere Grenze für μ . Es müssen mindestens ν Ringe $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\nu$ zerschnitten werden, welche resp. den Gliedern $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_\nu$ angehören.

Dadurch wird die Auswahl der zu zerschneidenden Ringe unter Umständen wesentlich beschränkt.

77. Für M ist Folgendes zu bemerken;

Jedes Glied des zweiten Drittels rechter Hälfte ist zusammengesetzt aus Gliedern vorhergehender Zeilen und ausserdem aus Ringen G , die zusammen kein vorhergehendes Glied bilden, obwohl sie in solchen vorhergehenden Gliedern vorkommen können. Zunächst kennzeichne man in jedem Gliede die Ringe G ; weiterhin unter diesen wieder die, welche in keinem Glied des letzten Drittels vorkommen: sie mögen G' heissen. Durch Zerschneiden eines G' wird ein Glied zweiten Drittels rechter Hälfte in Unterketten vorhergehender Zeilen und die Ringe G zerlegt. Man beginne nun (vgl. 71) damit, in jedem Gliede der letzten Zeile, die ein zweites Drittel enthält, einen Ring G' aufzuschneiden und schreite dann zu vorhergehenden Zeilen weiter.

78. Es ist aber jetzt möglich, dass die Auswahl des G' im einzelnen Gliede nicht mehr gleichgültig ist, wie bei den speciellen Schemata 61, weil sehr wohl einzelne Ringe in

einzelnen singulären Stellen discutirt und zwar je für die verschiedenen Blätter, in welchen sich das Curvensystem über der $(x\ y)$ -Ebene ausbreitet.

Im Folgenden ist ein anderer Weg eingeschlagen, um über den Gesamtverlauf der Integral-Curven einer Differentialgleichung erster Ordnung Aufschluss zu erhalten: Man betrachte durch Einführung eines Parameters die einzelne Differentialgleichung als Glied einer Reihe von continuirlich in einander übergehenden Differentialgleichungen und studire die Aenderungen, welche die Integralcurven durch eine solche stetige Abänderung der Differentialgleichung erleiden.

Es bleibt dann bei dieser continuirlichen Abänderung der Gesamtcharacter des Curvensystems im Allgemeinen erhalten und ändert sich nur an gewissen Sprungstellen durch Entstehen, Umformung und Verschwinden von singulären Punkten.

Dabei bezieht sich der schon in Abh. I. gebrauchte Ausdruck „Gesamtcharacter“ wie dort auch hier wieder auf die Art und Verteilung der singulären Stellen, auf die im Sinne der Analysis situs genommene Anordnung der verschiedenen Blätter und des darin näherungsweise darzustellenden Verlaufes der einzelnen Curvenzweige. Eigenschaften von Integralcurven dagegen, wie die, sich zu schliessen, oder noch specieller, algebraisch zu sein, fallen hier ausser Betracht, denn sie werden im Allgemeinen bei einer infinitesimalen Aenderung der Differentialgleichung verloren gehen.

So versucht die vorliegende Abhandlung eine Darstellung derjenigen Eigenschaften des Integralcurvensystems einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche bei im Sinne der Analysis situs nicht wesentlichen Umformungen der Differentialgleichung erhalten bleiben durch die Darlegung

ist das ihr entsprechende System der Integralcurven einfach überdeckend, ausgebreitet.

Die wichtigsten Umformungen dieses Curvensystems entsprechen denjenigen Umänderungen der Flächen des Systems, bei welchen die charakteristische Zahl (Zusammenhangszahl) der Fläche sich ändert. Ihnen entsprechen Aenderungen in der Anzahl der singulären Punkte des Curvensystems, den Relationen zufolge, welche diese Anzahlen mit der charakteristischen Zahl verknüpfen.¹⁾ Alle übrigen Aenderungen, die bei der continuirlichen Umformung im Verlaufe des Curvensystems auftreten, sind — auch wenn dabei singuläre Stellen auftreten oder verschwinden oder sich umformen — so beschaffen, dass sie jene charakteristischen Relationen nicht ändern.

Nehmen wir nun einmal an, für irgend eine Differentialgleichung des Systems sei der Verlauf der Integralcurven bekannt, so lässt sich die successive Aenderung der Integralcurven mit änderndem k von hier aus anschaulich verfolgen; speciell für die soeben gemachten Annahmen über die Endlichkeit der Fläche $F(x, y, y') = 0$ wird es einen Parameterwert k_a geben, für welchen die Fläche $F(x, y, y') - k_a = 0$ lediglich aus isolirten Punkten besteht, um von hier aus sich im Raume der x, y, y' continuirlich auszubreiten; dann werden wir von da ab mit der Entstehung des Integralcurvensystems selbst die Discussion der gestaltlichen Verhältnisse um die Bedingungen für das Eintreten von Unbestimmtheitspunkten im Allgemeinen handeln soll.

Ich nehme Gelegenheit, hier weiter ein Versehen zu berichtigen, welches in Formel (35.) auf pag. 54 untergelaufen ist. Die letzte der dort gegebenen drei Gleichungen ist, wie unmittelbar ersichtlich, zu ersetzen durch

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

1) Abh. I pag. 47, 48; Poincaré, Liouville's Journal Serie III Bd. 5, Serie IV Bd. 1.

$$\begin{aligned}
 (2.) \quad & x - x_0 = \xi, \\
 & (y - y_0) - y'_0 (x - x_0) = \eta; \text{ wo dann} \\
 & y' - y'_0 = \eta' = \frac{d\eta}{d\xi}.
 \end{aligned}$$

Es kommt dann die folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned}
 (3.) \quad & F(x, y, y') - k_0 = \\
 & (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi + \bar{F}_2 \eta + \bar{F}_3 \eta' + \\
 & + \frac{1}{2} \{ (\bar{F}_{11} + 2y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2_0 \bar{F}_{22}) \xi^2 + 2(\bar{F}_{12} + y'_0 \bar{F}_{22}) \xi \eta + \bar{F}_{22} \eta^2 \} + \\
 & + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi \eta' + \bar{F}_{23} \eta \eta' + \frac{1}{2} \bar{F}_{33} \eta'^2 + \dots
 \end{aligned}$$

eine Differentialgleichung, die das gemeinsame Wertesystem

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \eta' = 0$$

als Lösung besitzt.

Wir fügen zur Uebersicht des Folgenden das Diagramm bei, in welchem in der bekannten Weise die einzelnen Glieder in Bezug auf ihre Grössenordnung in ξ und η' (wobei η äquivalent mit $\eta' \xi$) eingetragen sind.

Fig. 1.

	η'^3	$\eta \eta'^2$	$\eta^2 \eta'$	η^3
		$\frac{1}{2} \eta'^2$	$\frac{1}{2} \eta \eta'$	$\frac{1}{2} \eta^2$
	η'^2	$\eta \eta'$	η^2	
			$\frac{1}{2} \eta^2 \eta'$	$\frac{1}{2} \eta^3$
η'	η	$\frac{1}{2} \eta \eta'$	$\frac{1}{2} \eta^2$	
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

I. Abschnitt.

Die wesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen

$$F(x, y, y') - k = 0.$$

§ 3.

Uebersicht.

Die Stelle x_0, y_0, y'_0 ist wesentlich singulär, wenn gleichzeitig die drei Gleichungen statthaben

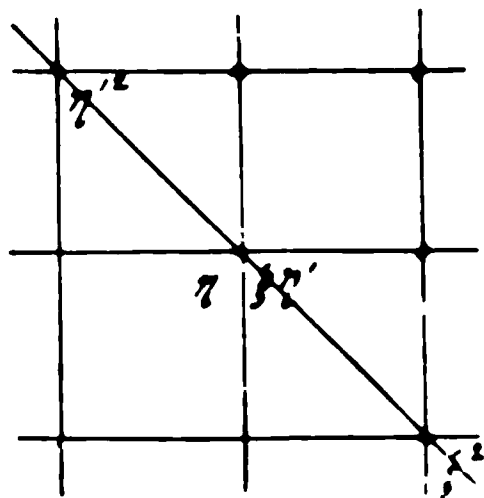
$$(4.) \quad \bar{F} - k_0 = 0, \quad \bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2 = 0, \quad \bar{F}_3 = 0.$$

Das Verhalten des Systems der Integralcurven in der Umgebung einer solchen Stelle ist (Abh. I) näherungsweise gegeben durch die Differentialgleichung:

$$(5.) \quad 0 = \bar{F}_2 \eta + \frac{1}{2} (\bar{F}_{11} + 2 y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2_0 \bar{F}_{22}) \xi^2 + \\ + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi \eta' + \frac{1}{2} \bar{F}_{33} \eta'^2,$$

welche dem aus Fig. 1 abgeleiteten Diagramm (Fig. 2.) entspricht.

Fig. 2.



Wir bezeichnen wie in (Abh. I) die drei Kategorien der wesentlich singulären Punkte als:

- Kateg. I. Punkte P_0 (Taf. I, Fig. I d. Abh. I.)
 „ II. „ P_2 (Tafel II, Fig. II.)
 „ III. „ P_∞ (Tafel III, Fig. III.)

Dann sind für die Unterscheidung dieser 3 Kategorien die Vorzeichen der folgenden beiden Ausdrücke massgebend

$$(6.) \quad M = \frac{F_{11} + 2 y'_0 F_{12} + y'^2_0 F_{22}}{F_{13} + y'_0 F_{23}} \quad \frac{F_{13} + y'_0 \bar{F}_{23} + F_2}{F_{33}}$$

und

$$N = 1 - M - F_2^2$$

- A) $\bar{M} = 0$ (§ 4.)
 B) $\bar{N} = 0$ (§ 5.)
 C) $\bar{F}_1 = 0, \bar{F}_2 = 0$ (§ 6–8.)
 D) $\bar{F}_{33} = 0$ (§ 9.)

bestehen.

Bedienen wir uns der schon in der Einleitung erwähnten Deutung der Variabeln x, y, y' als rechtwinkliger Coordinaten des Raumes, so können wir folgendes geometrische Bild bei unseren Betrachtungen einführen:

Das System der einfach unendlich vielen Flächen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

wird geschnitten einmal von der Fläche

$$F_1 + y' F_2 = 0,$$

welche auf den einzelnen Flächen $F - k = 0$ diejenigen Curven ausschneidet, für welche die Integralcurven in der Projection auf die xy -Ebene Wendepunkte besitzen.¹⁾

Weiter schneidet die Fläche

$$F_3 = 0$$

die Flächen des Systems $F - k = 0$ in den Umrisslinien U_k in Richtung der y -Achse; diese Linien, auf die xy -Ebene projectirt, sind also die Centren der Spiralen der Integralcurven.

Die Flächen

$$F_1 + y' F_2 = 0 \quad \text{und} \quad F_3 = 0$$

schneiden sich in einer Raumcurve S , welche auf den Flächen $F - k = 0$ die wesentlich singulären Punkte ausschneidet.

Auf dieser Raumcurve S sind einmal die Punkte ausgeschlossen, für welche $\bar{M} = 0$ ist, wo $N = 0$ ist; weiter die

¹⁾ Man vergl. die Note von M. L. de St. Germain, "Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre." Bulletin des Sciences Mathématiques, 1891, 15, 177.

Die gestaltliche Umformung der singulären Stelle lässt sich an Hand der Figg. III und I (beziehungsweise III' und I') der Abh. I. leicht verfolgen, wenn wir beachten, dass die beiden in der ersten Näherung ausgezeichneten Curvenzweige der Integralcurven, welche den Punkt III durchsetzen, im Grenzfalle zusammenrücken, um dann imaginär zu werden.

§ 6.

C) Die Knotenpunkte des Flächensystems $F - k = 0$. Geometrische Discussion.

Die Raumcurve S

$$F_1 + y' F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

durchsetzt die durch die Bedingungen

$$C) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

gegebenen Knotenpunkte des Flächensystems $F - k = 0$.

Für den Character dieser Stellen ist vor Allem die Lage des Tangentialkegels im Knotenpunkt gegenüber der Raumcurve S und in Bezug auf die Projection auf die xy -Ebene zu bestimmen, und zwar sind vier wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Der Tangentialkegel ist imaginär.

a) Ein elliptisch gekrümmter Flächenteil zieht sich auf einen isolirten Knotenpunkt zusammen.

wenden denselben auch in der Folge bei den in § 9 besprochenen Singularitäten. Das gleiche Princip, die Verhältnisse in einer eindeutigen Darstellung zu übersehen, liegt selbstverständlich auch den von Briot und Bouquet eingeführten allgemeinen Transformationen zu Grunde und kommt weiter in der auch von Poincaré verwendeten Betrachtungsweise des Integralcurvensystems auf der Fläche $F = 0$ zur Geltung.

der Ausdruck \bar{M} :

$$(13.) \quad \bar{M} = \frac{\bar{F}_{11} + 2y'_0 \bar{F}_{12} + y'^0_2 \bar{F}_{22} \quad \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}}{\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23} \quad \bar{F}_{33}} \quad |$$

wird, so ergibt sich aus den obenbezeichneten Substitutionen der $dx:dy:dy'$ in die linke Seite der Kegelgleichung:

$$(14.) \quad \left. \begin{array}{l} \bar{M} \cdot \bar{F}_{ik}^{-1}, \\ \bar{F}_{33}, \\ \bar{M} \cdot \bar{F}_{33}. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Gleiche Vorzeichen:} \\ \text{imaginärer Kegel.} \\ \text{Verschiedene Vorzeichen:} \\ \text{reeller Kegel.} \end{array}$$

2. Für die Projection des Kegels auf die (xy) -Ebene ergibt sich sofort:

Der Umriss des Kegels in der Projectionsrichtung der y' -Axe ist imaginär oder reell, je nachdem

$$(15.) \quad \bar{F}_{33} \cdot |\bar{F}_{ik}| \begin{array}{l} > 0 \text{ imaginärer Umriss.} \\ < 0 \text{ reeller Umriss.} \end{array}$$

3. Die Lage der Raumcurve S gegen den Kegel lässt sich direct aus dem Vorzeichen des Productes der Determinante \bar{F}_{ik} in die Determinante bestimmen, welche entsteht, wenn wir \bar{F}_{ik} mit den beiden Zeilen der Matrix (10.) (für die Fortschreitungsrichtung der Raumcurve) rändern. Die letztere Determinante reducirt sich auf $\bar{M} \cdot \bar{F}_{ik}$ und so folgt direct das Vorzeichen von \bar{M} als characteristisch für jene gegenseitige Lage, so zwar, dass für

1) Wo zur Abkürzung die Determinante des Kegels

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = F_{ik}$$

gesetzt ist.

Die in 3. gegebene Unterscheidung der Lage der Raumcurve S gegen den Kegel durch das Vorzeichen von \bar{M} fixiert gleichzeitig die Kategorie der im Knotenpunkte zusammenrückenden Singularitäten:

Im Falle a), in welchem der Kegel imaginär, das den Knotenpunkt umgebende und von S durchsetzte Gebiet „elliptisch“ ist, und ebenso im Falle b) in welchem die Raumcurve S den „elliptischen“ Raumteil des reellen Kegels durchsetzt, fallen, wenn wir den Uebergang mit der elliptisch gekrümmten Fläche beginnen, im Knotenpunkt zwei singuläre Stellen I. Art zusammen, um dann zu verschwinden.

In den Fällen c) und d), in welchen S den „hyperbolischen“ Raumteil des (reellen) Kegels durchsetzt, entstehen, wenn wir wieder den Uebergang mit der elliptisch gekrümmten Fläche beginnen, im Knotenpunkt zwei zunächst vereinigte singuläre Stellen II. Art, die sich dann auf der hyperbolisch gekrümmten Fläche trennen.

Das Verhalten des Integralsystems für die Fläche mit Knotenpunkt sei nun zunächst noch dadurch genauer präcisiert, dass wir diejenigen Curvenzweige, welche durch den singulären Punkt hindurchlaufen, direct nach der Methode von Briot und Bouquet bestimmen. In erster Annäherung lautet hier die Differentialgleichung:

$$(18.) \quad (\bar{F}_{11} + 2y'_0 \bar{F}_{12} + y'^0_0 \bar{F}_{22}) \xi^2 + 2(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi r' + \bar{F}_{33} r'^2 = 0$$

und deren Integral

$$(19.) \quad r = \xi^2 \cdot \frac{-(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \pm \sqrt{(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})^2 - \bar{M} \bar{F}_{33}}}{2 \bar{F}_{33}}$$

es ergeben sich also zwei Parabeln als Näherungscurven an

$$\left. \begin{array}{l} +2\varepsilon \\ 0 \\ -2\varepsilon \end{array} \right\} = \bar{F}_{1,1}(x-x_0) + 2\bar{F}_{1,2}(x-x_0)(y-y_0) + \bar{F}_{2,2}(y-y_0)^2 + \\ + 2\bar{F}_{1,3}(x-x_0)(y'-y'_0) + \dots$$

und dann die Tangentialebene:

$$(\bar{F}_{1,1} + y'_0 \bar{F}_{2,1})(x-x_0) + (\bar{F}_{1,2} + y'_0 \bar{F}_{2,2})(y-y_0) + \\ + (\bar{F}_{1,3} + y'_0 \bar{F}_{2,3})(y'-y'_0) = 0.$$

Für die Fläche mit Knotenpunkt hat daher die Curve der Wendepunkte einen Doppelpunkt, der sich beim Uebergang von $-\varepsilon$ nach $+\varepsilon$ in der bekannten Weise auflöst.

Der Doppelpunkt ist $\begin{cases} \text{isolirt bez.} \\ \text{nichtisolirt,} \end{cases}$ je nachdem

$$(21.) \quad (\bar{F}_{1,1} + 2y'_0 \bar{F}_{1,2} + y'^2_0 \bar{F}_{2,2}) \cdot \bar{F}_{1,3} \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array}$$

ist. Nun beachte man, dass im Falle

$$\bar{M} > 0$$

$$\bar{F}_{3,3} \text{ und } (\bar{F}_{1,1} + 2y'_0 \bar{F}_{1,2} + y'^2_0 \bar{F}_{2,2})$$

notwendig gleiches Vorzeichen besitzen, die obige Unterscheidung also direct die Trennung der Fälle $\begin{cases} \text{a)} \\ \text{b)} \end{cases}$ bezeichnet; so kommt hier:

Im Falle a) ist der Doppelpunkt der Wendepunktscurve stets isolirt; im Falle b) existiren stets zwei reelle Zweige der Wendepunktscurve durch den singulären Punkt, die sich dann beim Uebergang auf die Gleichungen mit $-\varepsilon$ bez. $+\varepsilon$ als Parameter je in zwei hyperbolische Aeste auflösen.

In den Fällen c) und d) dagegen haben wir nach der einen oder andern Form der Wendepunktscurve je zwei Unterfälle zu unterscheiden. Nun übersieht man aber leicht (vergl. die nachfolgende Vorzeichentabelle), dass der eben betrachtete Ausdruck

die nach den vorstehenden Entwicklungen für die Unterscheidung der vier Fälle und der Richtung des Uebergangs in denselben dienen:

Tabelle
für die Art der Singularitäten in den Knotenpunkten
 $\bar{F}_1 = 0 \quad \bar{F}_2 = 0 \quad \bar{F}_3 = 0.$

	M	$\bar{F}_{33} \quad \bar{F}_{ik}$	$ \bar{F}_{ik} $		
a)	+	+	+	Verschwinden	von zwei (Taf. IV wesentlich Fig. a) singulären Punkten (Taf. IV I. Art. Fig. b)
	+	+	—	Entstehen	
b)	+	—	+	Verschwinden	von zwei (Taf. V wesentlich Fig. c) singulären Punkten (Taf. VI II. Art. Fig. d)
	+	—	—	Entstehen	
c)	—	+	+	Entstehen	von zwei (Taf. V wesentlich Fig. c) singulären Punkten (Taf. VI II. Art. Fig. d)
	—	+	—	Verschwinden	
d)	—	—	+	Entstehen	von zwei (Taf. V wesentlich Fig. c) singulären Punkten (Taf. VI II. Art. Fig. d)
	—	—	—	Verschwinden	

§ 9.

D) Die Bedingung $\bar{F}_{33} = 0.$

Wie in § 2 erwähnt, besagt das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$F_3 = 0, \quad F_{33} = 0$$

für die Flächen

$$F - k = 0,$$

dass der Umriss derselben in seiner Projection auf die $x y$ -Ebene eine Spitze besitzt. Die Ordinate y' schneidet die Fläche $F - k = 0$ in drei aufeinanderfolgenden Punkten und die in der Umgebung dieser Stellen liegenden reellen Wert-

$$(23^a.) \quad \bar{F}_2 r + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi r' + \frac{1}{6} \bar{F}_{333} r'^3 = 0$$

und

$$(23^b.) \quad \bar{F}_2 r + \frac{1}{3} (\bar{F}_{11} + 2y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2 \bar{F}_{22}) \xi^2 \\ - (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi r' = 0$$

Bestimmt man nun nach dem von Briot und Bouquet gegebenen Verfahren mit Hilfe dieser Gleichungen die durch den singulären Punkt verlaufenden Curvenzweige, so ergeben sich zunächst aus (23^a.) die zwei Zweige:

$$(24^a.) \quad r = \pm \frac{1}{3} \sqrt[3]{-2 \frac{\bar{F}_2 + 3(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi^2}{\bar{F}_{333}}} \xi^3 + \dots$$

und aus (23^b.) der weitere:

$$(24^b.) \quad r = - \frac{(\bar{F}_{11} + 2y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2 \bar{F}_{22})}{4(\bar{F}_2 - \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})} \xi^2 - \dots$$

Es ist nun vor Allem zu entscheiden, welche Lage diese Curvenzweige zur Umrisscurve, und damit auf den drei im singulären Punkt zusammenhängenden Blättern der Fläche $F - i_0 = 0$ einnehmen.

Die Umrisscurve

$$F - i_0 = 0, \quad F_3 = 0$$

lässt sich für die Umgebung der singulären Stelle näherungsweise ersetzen durch

$$(25^a.) \quad \bar{F}_{111} F_2 r'^2 + (\bar{F}_{12} + y'_0 \bar{F}_{22}) \xi = 0.$$

Um die drei Blätter der Fläche $F - i_0 = 0$, die Fig. 7 in der $\xi\eta$ -Ebene voneinander liegen, zu trennen, genügt es, die Abbildung auf die $\xi\eta$ -Ebene zu machen. Dort erscheint in erster Annäherung die Umrisscurve als Parabel, gegeben durch:

$$(25^b.) \quad \frac{1}{2} F_{111} r'^2 + F_{12} + y'_0 F_{22} \xi = 0$$

und ist die Beziehung der beiden Projectionen auf einander durch die obenstehende Figur gegeben.

in denen wir zur Kürze (durch Vorzeichenwahl in F) $\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}$ als positive Grösse voraussetzen wollen, liefert:

Haben $(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$ und $2\bar{F}_2 + 3(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$ verschiedenes Vorzeichen, ist also $2\bar{F}_2 + 3(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$ negativ, so folgt, dass auch $\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}$ negativ ist und damit

$$\bar{M} = -(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})(\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) > 0.$$

Haben die obigen Ausdrücke gleiches (positives) Vorzeichen und ist:

$$2\bar{F}_2 + 3(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) < \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23},$$

so ist $(\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$ negativ und damit wieder

$$\bar{M} > 0;$$

ist dagegen

$$2\bar{F}_2 + 3(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) > \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23},$$

so ist $(\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$ positiv und daher

$$\bar{M} < 0.$$

Also ergibt sich:

Ist der in die Spitze der Umrisscurve fallende wesentlich singuläre Punkt von der III^{ten} Art, so ist die Lage der Umrisscurve U zu den Zweigen der Integralcurve durch die beiden Schemata:

Fig. 8a.

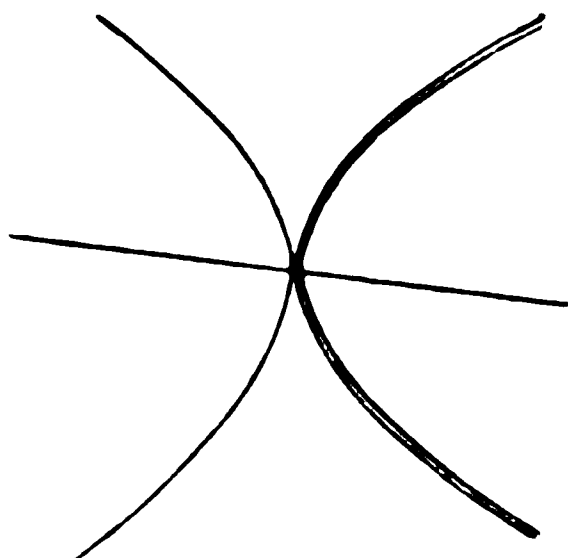
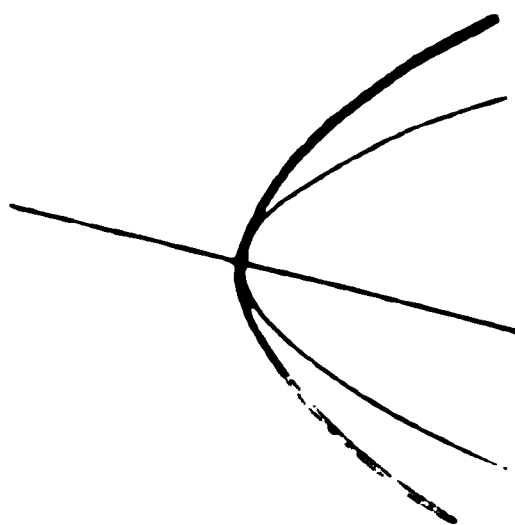


Fig. 9a.



gegeben, denen auf die $(\xi\eta)$ -Ebene projicirt, die Bilder

Fig. 8 b.

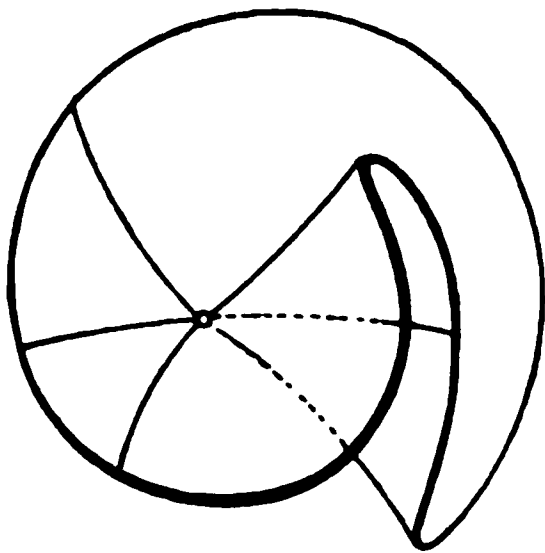
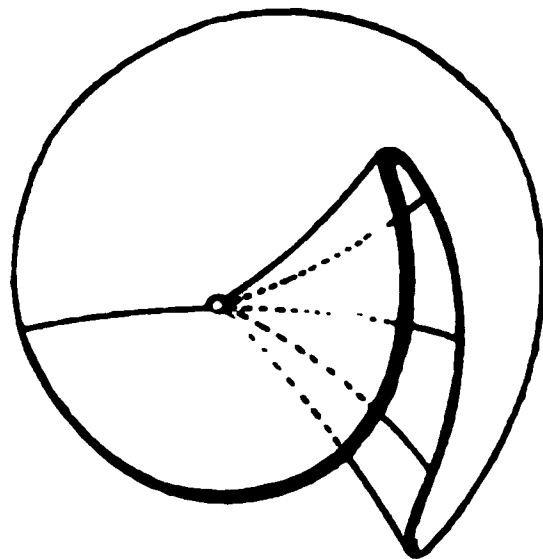
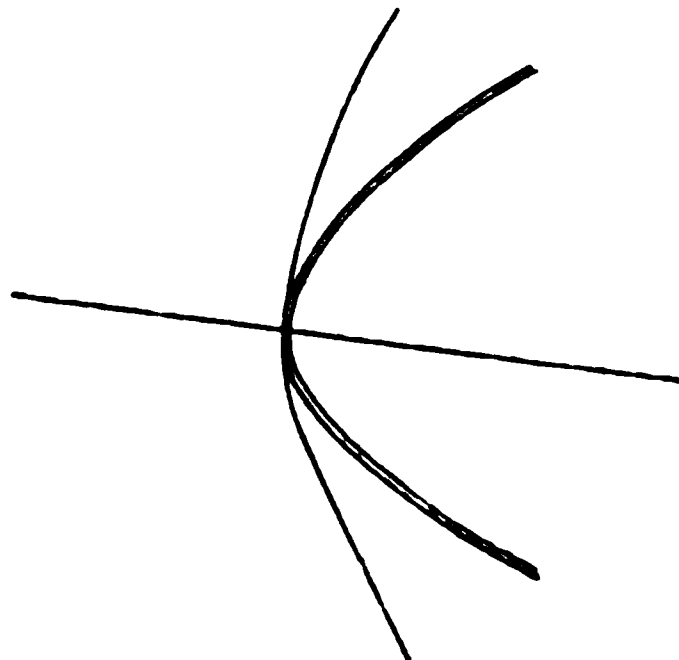


Fig. 9 b.



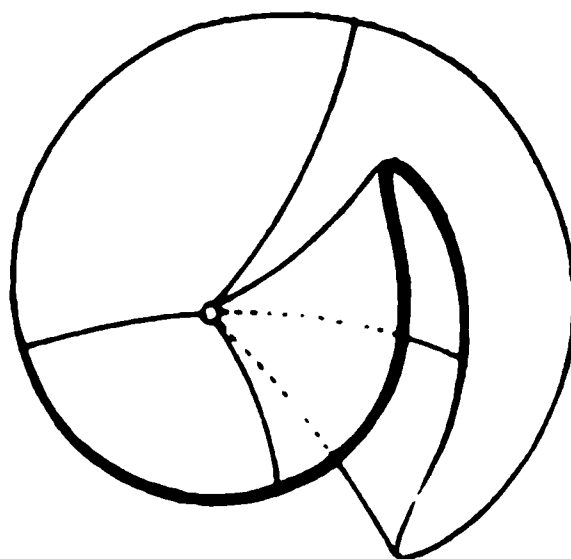
entsprechen, ist dagegen der wesentlich singuläre Punkt II^{ter} Art, so ist diese Lage schematisch gegeben durch

Fig. 10 a.



und das entsprechende Bild

Fig. 10 b.



Nun ist es nicht schwer, den Verlauf des ganzen Curvensystems in der Umgebung der singulären Stelle einzutragen, wenn wir beachten, dass der Character der singulären Stelle in der Projection auf die Ebene ($\xi \eta'$) dem Typus III' bez. II' der Abh. I. entspricht, wobei die eine der beiden ausgezeichneten Geraden, welche in dem dort dargestellten Falle die singuläre Stelle durchsetzen, durch die obige Parabel (26^a) zu ersetzen ist, die andere (in erster Näherung) durch die Gerade (26^b).

II. Abschnitt.

Die ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen $F(x, y, y') - k = 0$.

§ 10.

Uebersicht.

Die Stelle x_0, y_0, y'_0 einer Differentialgleichung $F - k_0 = 0$ ist ausserwesentlich singulär, wenn

$$(27.) \quad \bar{F}_3 = 0, \quad \bar{F}_{33} = 0;$$

dann ist das Verhalten des Integralsystems in der Umgebung einer solchen Stelle (wie schon erwähnt) im Allgemeinen durch die in § 3 und auf Tafel IV Fig. IV der Abh. I. gegebenen Entwicklungen gekennzeichnet.

Neben dem soeben besprochenen Zusammenrücken einer wesentlich und einer ausserwesentlich singulären Stelle haben wir jetzt noch das Zusammenfallen zweier ausserwesentlich singulären Stellen zu betrachten.

Deuten wir die Gleichungen

$$F_3 = 0, \quad F_{33} = 0$$

im Raume (x, y, y') wieder als die Gleichungen einer Raumcurve V , des Ortes der Spitzen der Umrisscurven, so wird ein Zusammenfallen zweier solcher Spitzen eintreten für die Berührungsstellen der Curve V mit einer der Flächen $F - k = 0$. Dies liefert sofort die Bedingungsgleichung:

$$(28.) \quad \begin{vmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 & 0 \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} & 0 \\ \bar{F}_{331} & \bar{F}_{332} & \bar{F}_{333} \end{vmatrix} = 0.$$

Man hat also zwei wesentlich verschiedene Fälle dieses Zusammenrückens zu unterscheiden, je nachdem zu den Bedingungsgleichungen:

$$\bar{F}_3 = 0, \quad \bar{F}_{33} = 0$$

noch hinzutritt:

$$\text{E)} \quad \bar{F}_{333} = 0 \quad (\S 11),$$

beziehungsweise

$$\text{F)} \quad \begin{vmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} \end{vmatrix} = 0 \quad (\S 12).$$

§ 11.

E) Die Bedingung $\bar{F}_{333} = 0$.

Dieser Fall gestaltet sich ganz analog dem schon in Abh. I. § 3 behandelten allgemeinen:

$$\bar{F}_3 = 0 \quad \bar{F}_{33} = 0.$$

Hier ergibt sich sofort in erster Näherung die Differentialgleichung:

$$(29.) \quad (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi + \frac{1}{24} \bar{F}_{3333} \eta'^4 = 0,$$

in welcher als nächste Näherungsglieder noch zutreten:

$$(30.) \quad \bar{F}_2 \eta + (\bar{F}_{12} + y'_0 \bar{F}_{22}) \xi \eta' + \frac{1}{120} \bar{F}_{22222} \eta'^5$$

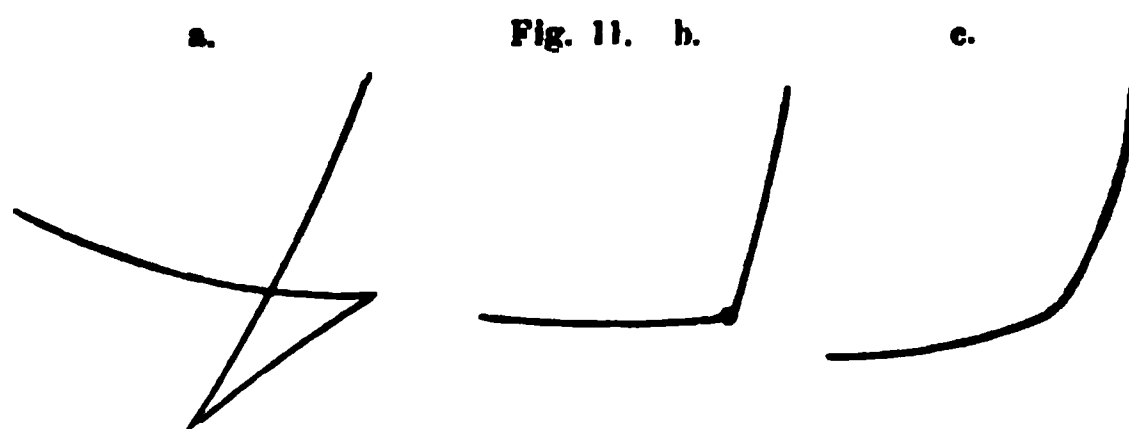
Die durch den singulären Punkt hindurchlaufende Curve ist in erster Näherung gegeben durch:

$$(31.) \quad (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi^3 + \frac{1}{24} \bar{F}_{2222} (\frac{1}{2} \eta)^4 = 0.$$

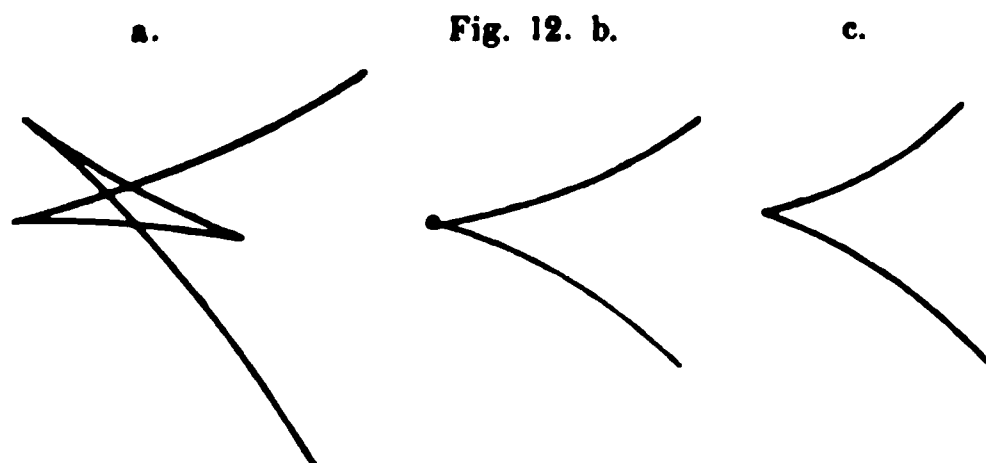
Für die Umrisscurve U ergibt sich (mit Berücksichtigung der Glieder zweiter Näherung):

$$(32.) \quad \frac{1}{24} (\bar{F}_{12} + y'_0 \bar{F}_{22})^4 \xi^4 - \frac{1}{27} \bar{F}_{2222} ((\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi + \bar{F}_2 \eta)^3 = 0.$$

Eine gestaltliche Discussion der Umgebung der singulären Stelle zeigt nun einmal: Die Umrisscurve deformiert sich bei ändernder Constanten k derart, dass zwei Spitzen in der bekannten durch die Figuren 11 a, b, c gekennzeichneten Weise zusammenrücken, um dann imaginär zu werden.



Der Verfolg des Zusammenhangs der einzelnen Blätter der Flächen $F - k = 0$ bei diesem Uebergang ergibt dann einen ähnlichen Uebergang der Curven des Integralsystems, bei welchem drei Spitzen (die sich auf die drei Zweige der Umrisscurve (Fig. 11^a) verteilen) zusammenrücken, wobei nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle die Integralcurven



maassgebend, welcher die Curve

$$(34.) \quad (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi^3 + \frac{1}{8} \bar{F}_{333} \left(\frac{3}{2} \eta\right)^2 = 0$$

entspricht; die Art der Auflösung dieser Singularität aber für die benachbarten Integralcurven wird eine andere, als die dort für den allgemeinen Fall (in Fig. IV) gegebene.

Wir betrachten zur genaueren Discussion im Raume x_0, y_0, y'_0 wieder drei aufeinander folgende Flächen $F - k = 0$, den Parametern

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

entsprechend. Hier bezeichne $\overset{\circ}{U}$ den Umriss der Fläche $F - k_0$ in Richtung der y' -Axe:

$$(35.) \quad \overset{\circ}{U} \begin{cases} F - k_0 = 0, \\ F'_3 = 0; \end{cases}$$

und analog $\overset{-\varepsilon}{U}, \overset{+\varepsilon}{U}$ die Umrisscurven für die beiden Nachbarflächen; ferner sei V der Ort derjenigen Punkte aller Umrisscurven U der Flächen $F - k = 0$ (in Richtung der y' -Axe), für welche die Tangente auf der xy -Ebene senkrecht steht:

$$(36.) \quad V \begin{cases} F'_3 = 0, \\ F'_{33} = 0. \end{cases}$$

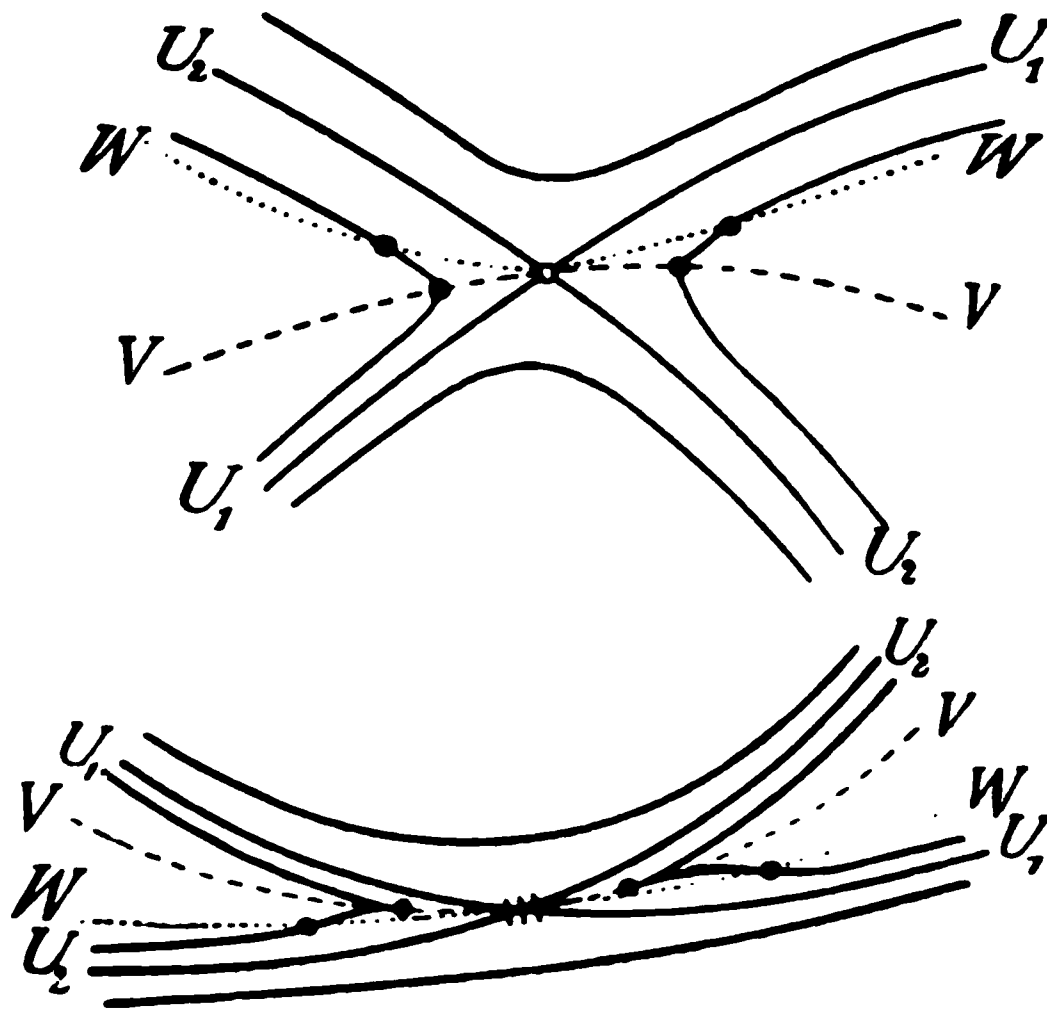
Endlich sei W der Ort der Punkte aller dieser Umrisscurven, für welche die Schmiegungsebene auf der xy -Ebene senkrecht steht:

$$(37.) \quad W \begin{cases} F'_3 = 0, \\ H = 0, \end{cases}$$

wo H die Hesse'sche Form von F bezeichnet.

Betrachtet man die Projection aller Umrisscurven in die (xy) -Ebene, so entspricht V dem Ort der Spitzen, W dem Ort der Wendepunkte dieser Projectionen.

Fig. 14.



ergiebt sich das Zusammenrücken zweier Spitzen der Umrisscurve zugleich mit dem Zusammenfallen zweier Wendepunkte derselben in der Weise, wie es Fig. 15 für den isolirten

Fig. 15.



Doppelpunkt von $\overset{\circ}{U}$ in einer ersten penultimaten Form, Fig. 16a und b für den nichtisolirten Doppelpunkt in den den Parametern $k_0 - \varepsilon$ wie $k_0 + \varepsilon$ entsprechenden Formen darstellt.

der wesentlich singulären Stellen durch Auftreten (bez. Verschwinden) von je zweimal zwei Punkten I^{ter} oder II^{ter} Art.

Die Aenderungen im Flächensystem, welche keine Aenderung in der Charakteristik hervorrufen, lassen auch die obige Formel unverändert:

Es entstehen (bez. verschwinden) im Falle A stets paarweise je ein Punkt P_+ und ein Punkt P_- , die sich bei der Abzählung compensieren. Im Falle B verwandelt sich ein Punkt P_+ in einen (für die Abzählung äquivalenten) Punkt P_0 oder umgekehrt. Im Falle D findet nur eine Verschiebung eines wesentlich singulären Punktes von einem Blatte der Fläche auf ein anderes statt, durch welche sich der Verlauf der Integralcurven in den aus den einzelnen Blättern bestehenden Teilgebieten entsprechend ändert, der Gesamtverlauf aber nicht. Die Fälle E und F bringen ebenso nur Aenderungen hervor, die sich auf die einzelnen Teilgebiete beziehen, innerhalb welcher sich (Abh. I. pag. 47) analoge Relationen wie für die Gesamtfläche aufstellen lassen.

In jedem Falle sind es ganz bestimmt gestaltlich zu bezeichnende Uebergangsformen, welche durch die successiven Aenderungen, die ein System von Integralcurven bei unserem Deformationsprocesse erleidet, hervorgerufen werden: sie ergeben, damit mag die Absicht der vorstehenden Untersuchung zusammengefasst sein, innerhalb der schon Eingangs bezeichneten Grenzen einen weiteren Aufschluss über den Gesamtverlauf solcher Curvensysteme.

[illegible][illegible]

1. *What is the purpose of the study?*
 2. *What are the research questions or hypotheses?*
 3. *What is the study design?*
 4. *What are the variables?*
 5. *What are the data sources?*
 6. *What are the data collection methods?*
 7. *What are the data analysis methods?*
 8. *What are the results?*
 9. *What are the conclusions?*
 10. *What are the limitations?*
 11. *What are the implications?*
 12. *What are the future research directions?*

4. The Commission has been informed that the Government of the Republic of Armenia has agreed to accept the findings of the Commission's investigation and to take the necessary measures to ensure that the rights of the victims are protected and that the perpetrators are held accountable.

1. The first step in the process is to identify the problem or issue that needs to be addressed. This involves gathering information and understanding the context of the problem.

1. The first part of the document is a list of names and titles, including "The Hon. Mr. Justice" and "The Hon. Mr. Justice".

Untersuchungen von Oberbergrath *Stache*¹⁾ und Dr. *Teller* gewonnen worden sind. Doch dürfen wir nach den gegebenen Andeutungen wohl vermuthen, dass im Allgemeinen die Gebirgsverhältnisse im Brennergebiete sich ähnlich denen verhalten, welche in so vortrefflicher und eingehender Weise von Dr. *Teller*²⁾ in Bezug auf die zunächst südlich anstossenden Gebirgstheile zwischen *Etsch* und *Eisack*, sowie der Höhenzüge nördlich vom *Pusterthal* geschildert worden sind. Darnach haben wir es in diesen Gebirgstheilen vielfach mit nach Nord überkippten, an parallelen Längsbrüchen überschobenen, isoklinen Einfaltungen jüngerer Ablagerungen in die Glimmerschiefer und Gneisse zu thun und die hier häufig beobachteten Schollen von *Triasdolomiten* als *Denudationsreste* von in den *Phyllitzügen* eingefalteten, ursprünglich ihnen aufgesetzten Ablagerungen aufzufassen.

Ich kann es nicht wagen, nach einem nur wenige Wochen dauernden Aufenthalt in dieser Gegend zur *Reconvalescenz*, während welchem ich nur gelegentlich einige geologische Untersuchungen vornehmen konnte, den höchst verwickelten Gebirgsbau dieser an sich in vielen Theilen nicht leicht zugänglichen Hochalpen mehr, als die ganz allgemeinen Eindrücke zu schildern, welche der Anblick des Gebirgs auf mich gemacht hat. Je näher man dieses im Einzelnen innerhalb kleiner Gebiete kennen lernt, um so höher scheinen sich die Schwierigkeiten anzuhäufen, die Beobachtungen unter einander richtig zu verbinden, um daraus allgemein gültige Folgerungen zu ziehen, wenn man nicht grössere Striche

¹⁾ *Stache* in Verh. d. k. k. geol. Reichsanstalt 1872 S. 78; Jahrb. 1873 S. 221; Jahrb. XXIV S. 135 und 333; Verh. d. k. k. geol. Reichsanstalt 1880 S. 249 und 250; Jahrb. XXVII S. 143; Jahrb. XXVIII S. 135.

²⁾ *Teller* in Verh. d. k. k. geol. Reichsanstalt in Wien 1878 S. 281; 1879 S. 31; 1880 S. 91; 1881 S. 69; 1882 S. 111; 1883 S. 108.

Gesteine, welche man allgemein als Phyllit bezeichnet. Auch in Bezug auf die näheren Mineralbestandtheile, welche zu ermitteln durch eine Partialanalyse versucht wurde, zeigt sich wenig Uebereinstimmung mit den Phylliten anderer Gegenden. Ein Schiefer von anscheinend dem allgemeinen Charakter der Kalkphyllite des Brennergebiets entsprechender Beschaffenheit aus dem Eisacktunnel unterhalb Gossensass erwies sich zusammengesetzt aus

- A) 1,26 % in ganz verdünnter Salzsäure löslichen Carbonaten
- B) 35,84 % in concentrirter Salzsäure in der Wärme zersetzten Gemengtheilen und
- C) 62,90 % unzersetztem Rest.

Die Carbonate (A) bestehen aus

Kalkcarbonat	0,900	= 71,43 %
Bittererdecarbonat . .	0,114	9,05 .
Eisencarbonat	0,210	16,66 .
Mangancarbonat	0,036	2,86 .
	<hr/> 1,260	<hr/> 100,00 %

Der durch concentrirte Salzsäure zersetzte Gemengtheil gehört vorwaltend der grümfärbenden Beimengung an. Denn nach der Einwirkung der Säure zeigt der Rückstand eine weissliche Färbung, während der grünliche Farbenton verschwunden ist. Die zersetzte 35,84 %ige grüne Substanz besteht in % berechnet aus

Kieselsäure	20,8500
Titansäure	0,7228
Thonerde	10,7386
Eisenoxyd	20,0160
Eisenoxydul	29,1900
Manganoxydul	2,0850
Kalkerde und Alkalien	Spuren
Bittererde	4,0042
Wasser	12,5100
	<hr/> 100,1166

Wenn man nun auch den durch diese Analysen gewonnenen Zahlen keineswegs den Werth beilegen darf, dass dieselben den mittleren Gehalt der Schiefer genau angeben, so scheint mir doch, dass neben der mikroskopisch-mineralogischen Untersuchung auch die chemische Zerlegung nicht von der Hand gewiesen werden darf, um weitere Hilfsmittel zur Unterscheidung der so verschiedenartigen, aber dem blossen Ansehen nach sehr ähnlichen Thonschiefergebilden zu gewinnen. In diesem Sinne mag dieser kleine Beitrag aufgefasst werden.

Mit diesen Glimmer-ähnlich glänzenden Schiefen, bei welchen zum Unterschied von dem ächten Glimmerschiefer der Glimmer-artige Bestandtheil sich nicht in zusammenhängenden, elastisch biegsamen Blättchen isoliren lässt, sind Einlagerungen von Quarzitschiefer spärlich, solche von grünen chloritischen Schiefen häufiger vergesellschaftet. Bei ersteren ist der Glimmer meist in dünnen weissen Blättchen deutlich entwickelt. Weit öfter stösst man auf grüne Schiefer, welche stellenweise wie im inneren Pferschtal in hornblendige und dioritische Gesteine verlaufen.

Diese grünen Schiefer besitzen dem Aeusseren nach das Ansehen der Chloritschiefer, setzen jedoch in dieser Gegend keine grösseren Gebirgstheile zusammen, sondern beschränken sich auf schmale Zonen zwischen den Phylliten, aus denen sie allmählig durch Ueberhandnahme des grünen Gemengtheils hervorgehen. Dementsprechend werden sie von Salz-äure in der Kochhitze völlig zersetzt und geben mit Hinterlassung weisser Schüppchen und quarziger Theile eine an Eisenoxydul reiche Lösung. Doch ist der Gehalt an dem färbenden grünen Gemengtheil, der sich wie der Chloropit des Phyllits verhält, ein sehr wechselnder. In dem grünen Schiefer neben einem Quarzitschieferlager zwischen Gassen-sass und Sterzing finden sich bis 0.25 mm lange und 0.1 mm dicke Turmalinkryställchen von brauner Farbe sehr

dankte, besteht theils aus typischen Glimmerschieferstücken, welchen oft Beimengungen von grünlichem Glimmer einen entsprechenden Farbenton ertheilen, theils aus Chlorit- und Strahlsteinschiefer namentlich aus dem Chialamberto Thale. Ihnen schliessen sich ausgezeichnete Serpentine in Begleitung von Serpentin-schiefer, Dioriten und Gabler-artigen Gesteinen an. Grüne Schiefer nach Art der oben erwähnten aus der Brennergegend fanden sich unter dieser Sendung nicht. Sehr eigenthümlich und bemerkenswerth ist dagegen das unter der Bezeichnung Besimandit von Herrn Sacco gesendete Gestein, welches gleichfalls eine grünliche Färbung besitzt.

Diese Besimandite (Zaccagna in Boll. d. r. comit. geol. 1887. S. 416) sind aus den West- und ligurischen Alpen bekannt. Unter den Original-exemplaren dieses Gesteins gehören zwei Stücke unzweideutig einem glimmerfreien Quarzporphyr an, zwei Stücke sind aber sehr unseren Zwischenschichten ähnlich. Diese innige Verbindung von Porphyr mit den fast tuffartig ausgebildeten Schiefern spricht sehr zu Gunsten ihrer Gleichstellung mit Perm-bildungen.

Der eine grünlich gefärbte Porphyr vom Mt. Besimanda in den ligurischen Alpen selbst besteht aus einer äusserst feinkrystallinischen, feldspathig-quarzitischen Grundmasse mit Aggregatpolarisation, in welcher reichlich grünliche Körnchen und Blättchen eines Chlorit-artigen Minerals in streifigen und krystallähnlich umgrenzten Partien eingebettet sind. Ganz vereinzelt finden sich darin stark pleochroitische Nadelchen von Hornblende, Körnchen von Magneteisen und Zirkon. In dieser Grundmasse liegen meist scharf umgrenzte, weisse Orthoklasan-scheidungen und nahezu in gleicher Menge meist in Kry-stallform ausgebildete wasserhelle Quarze voll von Blättchen, häufig von klaffenden Rissen durchzogen, welche von der Substanz der Grundmasse ausgefüllt sind.

Das spezifische Gewicht des Gesteins beträgt 2,740—2,744

Die beiden Exemplare des schiefrigen Besimandits aus dem Valle del Pesio der ligurischen Alpen S. von Cuneo, das eine aus dem Anfang des Thales (I), das andere von „Treta valle del Pesio e quelle dell' Ellero“ (II) gleichen, abgesehen von ihrer grünen Färbung, sehr den die Triaskalke der Centralalpen zunächst unterlagernden Gesteinen. Es sind knollig uneben wellig geschichtete Schiefer, in deren grünen chloritischen flaserigen Streifchen reichlich zum Theil grosse rundlich abgegrenzte Ausscheidungen von weissem und fleischrothem Orthoklas und wasserhellem Quarze eingebettet liegen. Die Hauptmasse der Fasern und die Mineralausscheidungen erinnern lebhaft an die oben erwähnten Porphyre vom Monte Ivramanda. Die Orthoklasknollen sind stark zerklüftet, oft fast ganz zerstört und durch Hohlräume ersetzt, deren Wände zum Theil mit braunen Eisen- und Mangan-haltigen Quarz-
 absonderungen bedeckt sind.

In Klüften, welche senkrecht zu den Schichtflächen verlaufen sind, bemerkt man in einander flaserig verlaufende Nadeln des grünen chloritischen Gemengtheils neben weissen Quarz und Orthoklas Ausscheidungen. Auch hier wurden Nadeln von Magnetit nicht beobachtet. Im Allgemeinen gleicht die Schieferung — abgesehen von ihrer Färbung — derjenigen des Besimandits vom Monte Ivramanda. In der Umgebung dieser Schiefer

ist ein Gestein, welches für eine beträchtliche Menge von Eisen- und Mangan-oxiden eine geringe Beimengung von Quarz enthält. Der Quarz ist in der Regel unverändert. Die Eisen- und Mangan-oxide sind in der Regel in der Umgebung der Schieferung zu finden. Die Eisen- und Mangan-oxide sind in der Regel in der Umgebung der Schieferung zu finden.

lichen Gebirgsdruckes sind, sondern mit der Ausbildung der krystallinen Mineraltheilchen und mit ihrem Festwerden in ursächlichem Zusammenhange stehen.

Kalkstein-Ein- und Auflagerungen.

Es ist nicht zu zweifeln, dass auch die mächtigen, in dicken Bänken auftretenden Lagen körnigen Kalkes einem ähnlichen Bildungsprocess ihre Entstehung verdanken. Doch ist es nicht immer leicht, die mit diesen Phyllitschiefern vergesellschafteten krystallinen Kalke als genetisch zu letzteren gehörige Glieder sicher zu erkennen. Oft gleichen die in diesen Gebieten den älteren Schieferschichten, nicht selten sogar ziemlich gleichförmig aufgesetzten jüngeren Triaskalke ihnen so sehr, dass eine Verwechslung um so leichter stattfinden kann, als die jüngeren Kalke hier vorherrschend hochgradig krystallinisch entwickelt sind und von glimmerartigen und phyllitähnlichen Ein- und Zwischenlagerungen begleitet werden. Dies beweisen die in verschiedenen Zeiten hergestellten geologischen Karten dieses Gebietes, bei welchen mehrfach derartige körnige Kalke bald als jüngere Triasbildungen, bald als zur Schieferbildung gehörige Einlagerungen dargestellt sind. Einem solchen Verhältnisse begegnen wir auch in der Brennergegend, wo z. B. zwischen Brennerpass und Gossensass auf der Ostseite in mehreren Steinbrüchen (auch in der Nähe des Bades) Lagen von körnigem Kalke unzweideutig dem Phyllit angehörig ausstreichen, während auf der Westseite von dem majestätischen Kalkstock des Tribulaun's am nördlichen Gehänge des Pflerschthales eine mächtige Kalkzone bis dicht an die Brennereinsattelung heranreicht, welche in der sonst vortrefflichen Karte des montanistischen Vereins gleichfalls zum älteren krystallinen Kalk gehörig dargestellt ist, während der Kalk des Tribulauns selbst aber dem jüngeren System zugetheilt erscheint. In neueren Karten ist derselbe Kalkzug im Norden

1. der südlichen Wand des Tribulaun's;
2. vom Stock der Weisswand SW. vom Tribulaun;
3. von den zum Obernberger-Thal abfallenden Wänden des Tribulaun's;
4. vom Schleierberg zwischen Pflersch- und Ridnauerthal;
5. von der Weissspitz zunächst südlich von Hühnerspiel bei Gossensass;

	1	2	3	4	5	6
Kalkcarbonat ¹⁾	66,50	66,24	86,80	73,80	75,30	55,19
Bittererdecarbonat . . .	28,08	29,60	10,58	22,77	21,25	44,02
Fe- und Mn-Carbonat . .	0,34	0,41	0,21	0,32	0,07	0,58
Unlöslicher Rest	4,17	3,75	2,25	3,11	3,20	0,21
Summe	99,89	100,00	99,84	100,00	99,82	100,00

Zu dieser Untersuchung wurden besonders solche Gesteine verwendet, welche keine deutlichen Merkmale ihrer Zugehörigkeit zu jüngeren Ablagerungen an sich trugen (den Dolomit von Mauls ausgenommen) und auf den Schichtflächen einige glimmerähnliche Schüppchen oder einen an Phyllit erinnernden zum Theil chloritischen Ueberzug erkennen liessen. Ueber letztere Beimengungen werden noch einige Bemerkungen später beigefügt werden.

Zunächst beweisen die angegebenen Zahlen, dass mehrere der untersuchten Gesteine die Zusammensetzung normaler Dolomite besitzen, andere dagegen zu wenigstens stark dolomitischen Kalken zu rechnen sind. Nur das Gestein der Probe Nr. 15 nähert sich sehr den Phyllitkalken. In der That findet sich dieser Kalk auch an einer Stelle, wo an einer grossartigen Verwerfungsspalte die Phyllitschichten

1) Das Kalkcarbonat wurde meist indirekt bestimmt.

Ablagerungen in den Centralalpen. Ich beobachtete fast die gleichen Gebilde in den tiefsten Schichten des Ortler-Stocks am Marltpass¹⁾, an den Ueberzügen, mit welchen die Versteinerungen in den Werfener Schichten der grossen Plattenbrüche bei Nona in den Bergamasker Alpen²⁾ überkleidet sind, auf den Gleitflächen der Kalkkeile am Gstellhorn in den Schweizer Alpen³⁾, in den phyllitartigen Zwischenschichten von Andermatt, in dem sog. Casannaschiefer, ja selbst in dem Glimmerschiefer-ähnlichen Gestein des Nufener Passes mit seinen *Beleminten*-Einschlüssen. Hieher scheinen auch die Gesteine zu gehören, welche Kilian⁴⁾ aus den Savoyer Alpen als *Calcaires et Marbres phylliteux* bezeichnet.

Ich verdanke der Gefälligkeit des Herrn Kilian mehrere Proben der sog. *Schistes lustrés* und *Calcaires phylliteux* aus den Savoyer Alpen. Die Schiefer sind tiefschwarzgrau, halbglimmerig- oder eigentlich fettglänzend mit einzelnen glimmerglänzenden weissen Schüppchen. In Dünnschliffen und i. p. L. zeigen dieselben Aggregetpolarisation und in der körnig schuppigen Hauptmasse kleinste undurchsichtige Stäbchen, welche wohl den Rutilnadelchen des gewöhnlichen paläolithischen Thonschiefers zu entsprechen scheinen, und daneben gleichfalls sehr zahlreiche, etwas grössere, durchsichtige Nadelchen, welche einzeln eine solche Grösse erreichen, dass man u. d. M. deutlich die bräunlichgraue Färbung, die Parallelstreifung der Säulenflächen und die Flächenzuspitzung an beiden Enden der Kryställchen erkennen kann. Diese besitzen in hohem Grade Dichromismus und gehören ohne Zweifel zum Turmalin, wie die ganz ähnlichen Nadelchen im Thonschiefer vom Brenner. Das färbende Princip rührt

1) v. Gümbel in Sitzb. d. bayer. Akad. d. Wiss. 1891. S. 100.

2) Ders., Das. 1880 S. 235.

3) Ders., Geolog. aus dem Engadin in Jahresber. d. r. Gesellsch. Graubündens XXXI S. 40.

4) In Bullet. d. l. soc. Geol. d. France; 3 Ser. 1. XIX p. 589.

auf den krystallinischen Schiefern der Centralalpen aufgesetzten Kalkschollen völlig ausgeschlossen und ich sehe darin keine anderen Erscheinungen, als solche, welche analog bei der Umbildung ursprünglich sedimentärer Niederschläge zu verfestigten Gesteinen überhaupt Platz gegriffen haben. Sie sind Folgen diagenetischer Processe und ihre Entstehung aus ursprünglich thonigem Material nicht auffallender und räthselhafter, als die pseudomorphe Umbildung von Glimmer etwa aus Granat oder Andalusit, von Chlorit aus Augit und die auch gegenwärtig noch an verschiedenen seichten Stellen der Meere gleichsam unter unseren Augen sich vollziehende Ausscheidung von Glaukonit in den Kammern der *Foraminiferen*.¹⁾ Was verhindert anzunehmen, dass die Bildungsprocesse, durch welche später pseudomorphisch aus Orthoklas, Granat, Andalusit u. s. w. Glimmer hervorgegangen ist, unter besonderen Umständen stellenweise auch schon bei der anfänglichen Entstehung solcher Schiefer mit krystallinischer Textur, wie solche in den Alpen in den verschiedensten Horizonten wiederkehren, wirksam waren? Es scheint dies viel besser den unserer direkten Beobachtung zugänglichen und uns bekannten Verhältnissen zu entsprechen, als eine Theorie der umbildenden Druckwirkung, die nicht erwiesen ist. In diese Reihe der Erscheinungen gehören auch gewisse andere krystallinische Mineralbildungen unserer Gegend.

Chlorit-ähnliche, deutlich krystallinisch ausgebildete, bis 5 mm dicke Lagen bedecken die Schichtflächen der tiefsten Triaskalke im inneren Pflerschthale. Diese Mineralsubstanz ist tief lauchgrün gefärbt, deutlich dichroitisch, schmilzt v. d. L. leicht zu schwarzen magnetischen Kügelchen und wird von concentrirter Salzsäure bei Kochhitze unter Hinterlassung von pulveriger Kieselsäure zersetzt. Das spezifische Gewicht

1) v. Gümbel, Ueber die Natur und Bildung des Glaukonits. In den Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. math.-phys. Classe 1886 III S. 417.

	I.	II.
Kieselerde	44,90	42,72
Thonerde	39,61	39,00
Eisenoxyd	2,12	Spur
Manganoxydul	Spur	—
Kalkerde ,	Spur	0,40
Magnesia	2,17	7,02
Kali	3,49	5,88
Natron	2,93	5,85
Wasser und Glühverlust .	4,25	—
	<hr/> 99,47	<hr/> 100,87

Mehr vereinzelte Blättchen eines weissen, Glimmer-artigen Minerals, dessen Zusammensetzung die Analyse II anzeigt, kommen theils auf den Schichtflächen der höheren Kalkbänke, theils mitten im Kalk, beziehungsweise Dolomit, eingeschlossen vor. Es scheint dieses Auftreten anzudeuten, dass die krystallinische Ausbildung des Kalks und Dolomits gleichzeitig mit der Entstehung der Glimmerartigen Mineralien und zwar gleich anfänglich, nicht erst durch eine nachträgliche Umbildung in Folge von Gebirgsdruck sich vollzogen hat. Beide Mineralien schliessen sich ihrer Zusammensetzung nach an die Glimmergruppe an, ohne aber mit irgend einer Abänderung derselben völlig übereinzustimmen. Es möchte dies auf eine theilweise erlittene Zersetzung zurückzuführen sein.

Der Kalkkeil am Pflerschthal.

Das Mittel, welches die Zusammensetzung der äusserlich sehr ähnlichen kalkigen Gesteine zu ihrer Unterscheidung in Aussicht stellt, wäre um so erwünschter, je verwickelter die Lagerungsverhältnisse sind, unter welchen die Kalke sich am Aufbau des Gebirgs betheiligen. Ein Beispiel hiervon liefert der Kalkkeil¹⁾ am Nordrande des Pflerschthales, dessen

1) Die Bezeichnung ist zwar nicht ganz richtig, weil dolomitischs Gestein vorherrscht, aber doch leichter verständlich als Dolomitkeil, was auch nicht ganz zutreffend wäre.

Pflerschthal verdient das Vorkommen von Bleierzen erwähnt zu werden.

Gossensass war in alter Zeit der Hauptsitz eines lebhaften Bergbaubetriebs.¹⁾ Noch jetzt bezeichnet ein buntgemaltes Bergmannswappen mit zwei Bergknappen und einem zwischen ihnen angebrachten grossen Bleiglanzblock über dem Eingang in das alte Berggerichtsgebäude (dem Gröbner'schen Gasthaus gegenüber) die Bedeutung, welche der Ort vormals in Bezug auf den Tiroler Bergbau²⁾ besass. Zahlreiche Berghalden, verbrochene Stollen und Schächte auf beiden Seiten des Pflerschthales nächst Gossensass sind die Ueberreste eines unzweifelhaft grossen Betriebs, welcher als der älteste in Tirol bezeichnet wird. Es sollen einst 300 Bergknappen, die Schuhe mit silbernen Nägeln beschlagen, einen Aufzug im Dorf gehalten haben. In der That steht neben der Hauptkirche ein von den Bergleuten erbautes, der St. Barbara und dem St. Anton geweihtes Knappenkirchlein, dessen Altäre mit Schlägeln und Eisen sowie mit Erzstufen verziert sind. Ueber die näheren Verhältnisse dieses Bergbaues ist sehr wenig bekannt.

Nach einer Beschreibung von P. R. in v. Moll's Jahrbücher der Berg- und Hüttenkunde (Bd. II S. 140) waren um 1798 noch auf beiden Seiten des Pflerschthales zwar nicht mehr betriebene, aber doch noch fahrbare Berggebäude vorhanden. Dieselbe bezeichnet das Erzvorkommen auf der nördlichen Thalseite zunächst Gossensass im Thonschiefer als ein Lager, welches unter dem Namen Hauptgang bekannt sei, in St. 8—9 streichend unter 10° nach NO. einfallend. Der einbrechende Bleiglanz sei grob- und kleinblättrig, von geringem Silbergehalte, zuweilen mit Schwefelkies-Spuren

1) Urkundlich wurde 1479 der Bergbau auf dem Schneeberg dem Berggericht zu Gossensass untergeordnet.

2) Jos. v. Sperges, Tyrolische Bergwerksgeschichte, Wien 1765 S. 60.

haben. nahm aber mit dem Vordringen in grössere Tiefe allmählig der Art ab, dass 1792 nur mehr 106 Knappen in Arbeit standen. die sich seit 1771 selbst ausschliesslich mit Auskuten der alten Halden beschäftigten. Bis dahin war nur der silberhaltige Bleiglanz Gegenstand der Gewinnung: die Zinkblende blieb in der Grube oder wurde über die Halde gestürzt. Erst 1871 nahm das k. k. Aerar den Bau energisch wieder auf und hat denselben bis jetzt mit Erfolg fortgeführt, wobei hauptsächlich die Zinkblende den Gegenstand der Gewinnung ausmacht.

Ueber die Natur der Schneeberger Lagerstätte besitzen wir aus neuerer Zeit mehrere Mittheilungen von bergmännischen Autoritäten. Oberberghauptmann C. v. Beust¹⁾ beschreibt dieselbe zuerst als eine ausgesprochen lagerförmige, weil sie sich conform mit dem Schiefergestein, dem Glimmerschiefer, erstreckt, nennt jedoch gegen Schluss seiner Schilderung dieselbe „einen Lagergang oder deutlicher ausgedrückt ein Pseudolager, dessen Ausfüllung das Resultat eines späteren Eindringens der dasselbe constituirenden Erzmassen sei“. Das heisst doch wohl: die Erze kommen zwar thatsächlich auf einem Lagerzug vor, aber theoretisch sind sie wie auf Gängen entstanden. Für diese Annahme werden aber weiter keine Beweise beigebracht, als die Analogie mit anderen sog. Lagergängen. Balling²⁾ wiederholt diese Ansicht, indem er anführt, dass die Erze parallel den Schichten des Glimmerschiefers eingelagert auf einem Lagergang — Pseudolager — vorkommen. Posepny³⁾ zieht gleichfalls das lagerförmige Vorkommen nicht in Zweifel, glaubt aber dasselbe dadurch erklären zu können, dass er die Bildung der geschweiften Erze von einer Art Pseudomorphosen-Process ableitet, bei welchem an die Stelle der anfänglich vorhandenen

1) Oesterreich. Zeitschrift f. Berg- u. Hüttenw. 1871. 201.

2) Dasselbst Jahrg. 1872. S. 410.

3) Dasselbst Jahrg. 1879. S. 106.

oft mit Lettenausfüllung, auf welchen die meisten der überaus zahlreichen Stollen querschlägig auf die Lagerstätte getrieben waren, verwerfen das Lager treppenförmig in NO.-Richtung, wodurch nach Posepny¹⁾ eine Art Advorschub nach W. sich ergibt. Bis Ende des 18. Jahrhunderts blieb das Vorkommen von Zinkblende unbeachtet. In dem älteren Bericht aus dem Jahre 1798²⁾ wird dieses weitaus vorherrschende Erz nicht einmal dem Namen nach erwähnt und erst 1799 führt Senger³⁾ an, dass man auch die Zinkblende zu benützen angefangen habe. Alle diese Verhältnisse, welche an der Schneeberger Erzlagerstätte zu beobachten sind, bestätigen die Analogie dieses Erzvorkommens mit dem im Pflerschthal bei Gossensass.⁴⁾

Entstehung der Brennerbad-Quelle.

In welcher Beziehung stehen nun diese geologischen Verhältnisse, welche wir in der Umgegend des Brenners kennen gelernt haben, mit der Therme des Brennerbades?

Man wird ohne nähere Prüfung der Gebirgsverhältnisse wohl geneigt sein, dieses Auftreten mit der Entstehung des Brennerpasses selbst in unmittelbare Beziehung zu bringen. Bestärkt wird man in dieser Annahme, wenn wir den Blick auf eine geologische Uebersichtskarte, wie z. B. auf die vorzügliche geologische Karte v. Hauer's werfen und wahr-

1) Die Bezeichnung „Trümmer“ scheint mir für derartige Abzweigungen nicht geeignet.

2) v. Moll's Jahrbücher d. Berg- u. Hüttenkunde 1798. II. S. 117.

3) Beschreibung einer Wanderung nach dem Schneeberg. Dasselbst. IV. S. 156.

4) Ob der in der Nähe des Schneebergs an der sog. Seespitz dem Glimmerschiefer aufgelagerte, weisse Kalk analog jenem am Tribulaun und im Pflerschkeil den Triasbildungen zuzurechnen sei, wie es wahrscheinlich ist, muss ich unentschieden lassen, da es mir nicht gelungen ist, Gesteine dieses Vorkommens zu sammeln und zu untersuchen.

Während das Hauptthal dem Pflerschbach folgt, durchbricht der Eisack in einer felsigen Schlucht einen zweiten oberen Felsriegel, auf dem die Kirche des Dorfes steht und durch den die Strasse nach dem Brennerpass neben der Eisack und einer hohen Felswand geführt ist. Auch hier habe ich keinen Moränenwall gesehen. Ueberall streichen die Phyllitschichten gleichartig quer durch die Thalvertiefung hindurch. Gleich oberhalb legt sich ein Kalklager im Phyllit an, in dem ein Steinbruch angesetzt ist. Dann folgen in dem Eisackthal bis zum Brennerbad, in zahlreichen natürlichen und durch den Eisenbahnbau geschaffenen Entblösungen sichtbar, Phyllitschichten mit Kalksteineinlagerungen, welche, abgesehen von örtlichen Biegungen, so ziemlich quer über das Theil streichen. Ein Schichtenbruch oder -Verrückung in dieser Thalrichtung hat sich nicht nachweisen lassen.

Erst am Brennerbad selbst bemerkt man eine längs-streichende Schichtenknickung, die einerseits mit der oberen Abbruchfläche des Pflerscher Kalkkeil in Beziehung tritt, andererseits in der Nähe des Wolfendornbergs fortzieht. Diese Bruchlinie in Verbindung mit der weichen Beschaffenheit und leichten Zerstörbarkeit der Phyllitgesteine scheint zusammen bewirkt zu haben, dass die obersten Thalenden der Eisack und der Sill zusammenschneidend zu einer gleichsam gemeinsamen Thal-artigen Vertiefung sich verbunden haben, auf der erst später die beiden Wassergebiete sich abgegrenzt haben. Daraus erklärt sich der so auffallend Thal-ähnliche Charakter der breiten Brennerpass-Einsattelung.

Damit steht nun auch das Auftreten der Therme des Brennerbades nach zwei Richtungen hin im Zusammenhang. Einmal entspringt die Quelle auf dem Sattel in einem tiefen, ein Thal vertretenden Passeinschnitt, wie sonst die Mineralquellen in Thälern zu Tag zu treten pflegen. Der Brennerpass hat in Bezug auf die Therme die Bedeutung

Berichtigung.

Seite 91 Zeile 6 v. u.

statt $[A\ B][C\ D]\ E],\ [A\ B][C\ D][E\ F']]$ etc.

lies $[[A\ B][C\ D]]\ E],\ [[A\ B][C\ D]][E\ F']]$ etc.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 133. Stiftungstages

am 28. Mai 1892.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, leitet die Sitzung mit folgenden Worten ein:

Die kgl. Akademie der Wissenschaften feiert heute ihren 133. Stiftungstag. Am 28. März 1759 erliess der Wittelsbacher Max Josef, Churfürst von Bayern, einen offenen Brief, in welchem er die Gründung der churbayerischen Akademie der Wissenschaften beurkundete. Vorher bestand nur eine schon von seinem Vater Kaiser Karl VII. unterstützte gelehrte Privatgesellschaft unter dem Namen Parnassus boicus. Max Josef wollte der Wissenschaft freie Bahn zu ihrer Fortentwicklung schaffen. In der Urkunde sagt er: „Weil wir überdiess durch Abschaffung aller Hindernisse, die immer dem vorgesetzten Endzweck entgegenstehen könnten, die Ausbreitung nützlicher Wissenschaften und Künste, so viel an Uns ist, zu erleichtern, und deren Ansehen ehrwürdig zu machen gnädigst entschlossen sind, so nehmen wir die Akademie in Unseren churfürstlichen Schutz und wollen aus

besondern Gnaden derselben Protektor sein und heissen dergestalt, dass wir Niemanden über selbe eine Jurisdiktion gestatten, noch geschehen lassen wollen, dass von der akademischen Versammlung für genehm gehaltene Aufsätze einer anderweitigen Censur unterworfen werden.“

Auch seine Nachfolger haben dieses Protectorat mit Weisheit und Wohlwollen aufrecht erhalten, und so schauen wir auch gegenwärtig vertrauensvoll und dankbar auf zu unserm Protektor Prinz-Regent Luitpold, des Königreichs Bayern allergnädigstem Verweser.

Es ist üblich, bei der jährlichen Wiederkehr des Stiftungsfestes der im vergangenen Jahre dahingeshiedenen Mitglieder zu gedenken und mit einer Festrede eines activen Mitgliedes, abwechselnd aus den drei Classen der Akademie, zu schliessen. Zuvor noch sei mir gestattet, mitzutheilen, was zwei mit der Akademie verbundene Stiftungen, der Zographosfonds und die Liebig-Stiftung betrifft.

Die kgl. Akademie der Wissenschaften hatte im Jahre 1889 zur Bewerbung um den von Hrn. Christakis Zographos gestifteten Preis zur Förderung des Studiums der griechischen Sprache und Literatur auf Vorschlag der philosophisch-philologischen Classe als Aufgabe gestellt: „Herausgabe des byzantinischen Meloden Romanos, mit einer die handschriftliche Ueberlieferung, die literarhistorische Stellung und die metrische Kunst des Dichters darlegenden Einleitung.“ – Rechtzeitig ist eine Bearbeitung derselben eingeliefert worden mit dem Motto aus Byrons Manfred:

„By the power which hath broken
The grave which enthrall'd thee,
Speak to him who has spoken
Or those who have call'd thee!“

Der Verfasser derselben hat für eine Ausgabe des Romanos-

fassers enthaltenden versiegelten Couverts wiederkehrt. Der Preis für die gelöste Aufgabe beträgt 2000 M., wovon die eine Hälfte sofort nach der Zuerkennung, die andere Hälfte aber erst dann zahlbar ist, wenn der Verfasser für die Druckveröffentlichung seiner Arbeit genügende Sicherheit geboten hat.

Das Curatorium der Liebig-Stiftung hat auf Antrag des geheimen Raths und Professors Dr. Julius Kühn, Director des landwirthschaftlichen Instituts an der Universität Halle und Mitglied des Curatoriums einstimmig beschlossen, unserm Collegen und Secretär der mathematisch-physikalischen Classe Dr. Carl v. Voit in Anerkennung für seine bahnbrechenden Forschungen über Stoffwechsel und Ernährung von Menschen und Thieren die höchste Auszeichnung, die goldene Liebig-Medaille zu verleihen, welche ihm in der Sitzung des Curatoriums vom 3. Februar 1892 überreicht wurde.

Der Präsident hat nun zunächst eines verstorbenen Fürstengrafen zu gedenken:

Don Pedro II. d'Alcantara, Kaiser von Brasilien. Im November des vergangenen Jahres wählte unsere Academie Don Pedro II., Kaiser von Brasilien, zum Ehrenmitglied. Seine Herrschaft hat leider nur kurz: einige Wochen vor seinem Einzug in den Thron im Jahre 1889 entlegte der Tod das Leben von diesem ausgezeichneten, aber auch vielgeliebten Fürsten, welcher nicht nur ein großer Herrscher, sondern auch die wissenschaftliche Welt sehr verehrt hat.

Wenn ich die bekanntlich Präsentaten nicht schmeicheln darf, so ist es doch mit Marcus Aurelius, dem besten Kaiser der römischen Kaiserzeit. Sein Lebenslauf bietet des Interessanten so viel, daß ich nicht nur mich, sondern mein akademisches Publikum sehr unterhalten würde. Das Ganze bleibt aber dem Herrn Präsidenten und Mitgliedern überlassen.

er noch einige Tage vor seinem Tode zu Paris einer Sitzung in Mitte der 40 Unsterblichen beiwohnte. Ferner war er Mitglied der Royal Society in London, der Akademien der Wissenschaften in St. Petersburg, Moskau, Florenz, Berlin und München.

In gleichem Maasse interessirte sich der Kaiser für Fortschritte in Künsten und Gewerben. Es ist bezeichnend für seine Natur, dass er schon im Jahre 1857 dem damals in der alten Welt noch viel verkannten Richard Wagner den Vorschlag machte, für das lyrische Theater in Rio de Janeiro eine Oper zu componiren.

Eisenbahnen und Telegraphen, Schifffahrt, Handel und Ackerbau suchte er in jeder Beziehung zu fördern.

Für seine Person ein gläubiger katholischer Christ, achtete und förderte er auch Andersgläubige und verkehrte freundschaftlich mit Protestanten, Juden und Mohammedanern. In Avignon erscheint eine unter den Israeliten Frankreichs verbreitete Monatsschrift „La famille de Jacob“, in welcher im Decemberheft 1891 in einem Artikel über den Tod Dom Pedro II. wörtlich steht: „Er liebte nicht bloss unsere heilige Sprache, er liebte uns selbst; er achtete die Tugenden unserer Race, welche er gegen die gehässigen Angriffe des modernen Antisemitismus vertheidigte, der ihn empörte.“

Seine Regierung war eine durchaus liberale, auf constitutionell-monarchischer Grundlage. Für jeden seiner Unterthanen war er zugänglich und wohlwollend.

Da muss man sich fragen, wie ein solcher Monarch plötzlich entthront und des Landes verwiesen werden konnte!

Am 15. November 1889 brach in der Hauptstadt Rio de Janeiro unter Führung des Marschalls Fonseca eine Militärrevolution aus. Anstatt des Kaisers begann ein Dictator zu herrschen. Dom Pedro erklärte, dass er mit keinem Tropfen Blut seiner geliebten Unterthanen die Herrschaft dem Usurpator entreissen wolle. Widerstandslos begab er sich

Auch unsre Akademie der Wissenschaften wird Dom Pedro d'Alcantara stets bewundern und ihm ein dankbares Angedenken bewahren.

Der Classensecretär Herr C. v. Voit gedachte sodann der seit dem vorigen Stiftungstage gestorbenen Mitglieder der mathematisch-physikalischen Classe.

Die Classe hat in dem verflossenen Jahre die ungewöhnlich grosse Anzahl von elf Mitgliedern durch den Tod verloren, darunter solche, welche die Wissenschaft in neue, vorher nicht betretene Bahnen gelenkt haben und zu den ersten Meistern in ihrem Fache zählten.

Zu diesen gehörte das am 10. Mai 1891 im 74. Lebensjahre dahier gestorbene ordentliche Mitglied der Classe, Carl Wilhelm von Nägeli, welcher allgemein als der vielseitigste und geistreichste unter den Botanikern der neueren Zeit galt. Er war ausgerüstet mit den umfassendsten Kenntnissen in der Morphologie und Physiologie der Pflanzen, aber auch in der Physik und Chemie; zugleich war er ein ungemein scharfer Beobachter und folgerichtiger Denker. Namentlich in den letzten Jahren seines Lebens hat er sich noch den schwierigsten Problemen seiner Wissenschaft zugewandt und mit philosophischem Geiste das Beobachtete bis in die letzten Consequenzen durchzudenken geliebt.

Ich hebe nur einige seiner hauptsächlichsten Arbeiten hervor, um dem Nichtfachmann ein annäherndes Bild seiner Thätigkeit zu geben.

Zunächst erwähne ich seine ausgedehnten Beobachtungen über die Zellenbildung und das Zellenwachsthum in den pflanzlichen Organismen; dann die grosse Monographie über die Stärkekörner, in welcher er die Lehre von dem Wachsthum durch Intussusception entwickelte und bis zu dem molekularen Aufbau dieser Gebilde vorzudringen wagte:

mitwirkenden Ursachen zu überblicken, so haben seine Ideen doch in hohem Grade anregend und befruchtend gewirkt.

Ich habe heute an dieser Stelle nur dem gerechten Stolze Ausdruck zu verleihen, dass ein so bedeutender Forscher so lange Zeit unserem Kreise angehörte, und zu beklagen, dass er uns entrissen wurde; von sachkundiger Seite werden Nägeli's Verdienste um die Wissenschaft in einer besonderen Denkrede eingehende Würdigung erfahren.

Von auswärtigen und correspondirenden Mitgliedern der Classe sind folgende gestorben:

Das auf den Vorschlag von J. Liebig gewählte correspondirende Mitglied Don Ramon Torres Munoz de Luna, Professor der Chemie an der Universität zu Madrid, ist am 10. November 1890 in Malaga aus dem Leben geschieden. Luna war längere Zeit einer der thätigsten und wirksamsten Chemiker Spaniens; er hat namentlich durch die Entdeckung ausgedehnter Phosphoritlager bei Cocierés in Estramadura, dann durch seine Arbeit über den Einfluss der phosphorsauren Erden auf die Vegetation und deren Anwendung zur Erhöhung der Getreideproduktion, sowie durch seine Schrift über die Zukunft der Agrikultur in Spanien einen sehr nützlichen Einfluss auf den Feldbau der pyrenäischen Halbinsel ausgeübt.

Dr. med. Joseph Leidy, Professor der Anatomie an der Pennsylvania-Universität und am Swarthmore-College in Philadelphia, ist am 30. April 1891 im 68. Lebensjahre gestorben. Er war ein sehr verdienter Forscher auf dem Gebiete der Zoologie und Paläontologie, von umfassenden Kenntnissen. Seine wissenschaftlichen Untersuchungen erstrecken sich über weit aus einander liegende Gebiete der Zoologie. In zahlreichen Publikationen beschäftigte er sich mit der amerikanischen Süßwasserfauna, worüber er namentlich eine umfangreiche, von prächtigen Abbildungen begleitete

Mineralog eine höchst anregende Lehrthätigkeit aus. Seine geologischen Hauptarbeiten beschäftigen sich mit dem rheinischen Schiefergebirge, dem Teutoburger Wald, der Weserkette, dem schlesischen Lande und dem norddeutschen Diluvium; sie sind Muster sorgfältiger Beobachtung und lichtvoller Darstellung. Als Paläontologe war er in fast allen Theilen des Thierreichs erfolgreich thätig und galt in Deutschland unbestritten als erste Autorität für paläozoische Organismen. Während einer 1½ jährigen Reise nach Nordamerika hatte Römer überdies die erste Grundlage für die Geologie von Texas geschaffen. Der Verlust des verdienstvollen und hervorragenden Gelehrten wird in der Wissenschaft schmerzlichst beklagt.

Der am 29. December 1891 verstorbene Berliner Mathematiker Leopold Kronecker war am 7. December 1823 zu Liegnitz in Schlesien geboren worden. Ein Schüler von Kummer, Dirichlet und Jacobi hat er gleich mit dem Beginne seines mathematischen Schaffens sich einen Platz in der ersten Reihe der Mathematiker der Gegenwart erworben. Er ist der Schöpfer von fundamentalen zahlentheoretischen Arbeiten, von welchen ausgehend er weiterhin insbesondere die arithmetische Seite der Algebra, der Funktionentheorie und der Geometrie in wichtigen und weittragenden Untersuchungen gefördert hat. Einen Zeitraum von 40 Jahren hindurch war er bis zu seinem Ende in erstaunlicher Vielseitigkeit und Fruchtbarkeit thätig, durch seine Arbeiten in alle Zweige mathematischen Wissens eingreifend, und so hinterlässt sein vorzeitiger Tod eine nicht zu ersetzende Lücke in der mathematischen Welt.

Sir George Bidell Airy (geboren am 27. Juli 1801 in Alnwick in Northumberland, gestorben am 2. Januar 1892 in Greenwich) gehört zu den bedeutendsten englischen Astronomen dieses Jahrhunderts, er hat in nahezu 70 Jahre an-

und ihre physischen und psychischen Unterschiede klar zu legen, besonders in seinem sämtliche Völker der Erde umfassenden Werke, *Crania ethnica*, in welchem allerdings die heut' zu Tage als nothwendig erachteten Schädelmessungen noch nicht berücksichtigt sind. Mit Darwin's Lehre von der Entstehung der Arten durch natürliche Zuchtwahl konnte er sich nicht befreunden; er bekämpfte die Lehre von der Abstammung des Menschen vom Affen, vertheidigte die Auffassung von der Einheit des Menschengeschlechts, dessen Wiege er im nördlichen Asien suchte, und er lebte der Ueberzeugung, dass der Mensch sich vom Thier strenge durch das Geistige, durch das Vorhandensein moralischer und religiöser Ideen unterscheide. Die von dem sonst nüchternen Forscher in patriotischer Erregung geschriebene unglückliche Abhandlung: *La race prussienne*, welche er später wohl selbst beklagt hat, wollen wir Deutsche, in Anbetracht seiner sonstigen grossen Verdienste um die Wissenschaft, vergessen. Quatrefages stand in seinem Vaterlande in höchstem Ansehen als Vertreter der biologischen Fächer, namentlich bei wissenschaftlichen Versammlungen im In- und Auslande, wobei er durch seine ungewöhnliche Beredsamkeit und persönliche Lebenswürdigkeit unterstützt wurde.

Mit dem am 20. Februar d. J. im Alter von 75 Jahren in Heidelberg verstorbenen hervorragenden Chemiker Hermann Kopp ist ein mit unserem unvergesslichen Präsidenten Justus v. Liebig sowie mit den Erfolgen des Giessener Laboratoriums-enge verbundener Forscher aus dem Leben geschieden. Er war ein anspruchsloser Gelehrter, von dem erstaunlichsten bis in die ersten Anfänge seiner Wissenschaft sich erstreckenden Wissen, von schärfster Beobachtungsgabe, durchdringendem Verstande und ungewöhnlicher Schaffenslust. Er hat vom Anfang seiner Thätigkeit an als einer der ersten Pioniere das für die theoretische Chemie so wichtige Grenzgebiet der

Sitzung vom 7. Mai 1892.

1. Herr WALTHER DYCK legt eine Abhandlung des Herrn Professor ALFRED PRINGSHEIM: „zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Convergencebereich“ vor.

2. Herr GUSTAV BAUER überreicht eine von dem auswärtigen Mitgliede, Herrn Professor AUREL VOSS in Würzburg, eingesandte Abhandlung: „über die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.“

3. Herr NIKOLAUS RÜDINGER übergibt den von ihm zusammengestellten Katalog der anthropologischen Sammlung der hiesigen anatomischen Anstalt, welcher einen Theil der auf Anregung der deutschen anthropologischen Gesellschaft herausgegebenen Verzeichnisse des in Deutschland vorhandenen anthropologischen Materials darstellt.

maassen überschätzt zu werden. Denn abgesehen davon, dass wohl Niemand, der sich mit der Theorie der Taylor'schen Reihe etwas näher beschäftigt hat, an der Existenz derartiger Functionen den geringsten Zweifel haben konnte, so möchte ich Herrn Mittag-Leffler nicht einmal darin beistimmen, dass solche Functionen bisher überhaupt noch nicht studirt worden seien.¹⁾

Die principielle Frage, um die es sich hierbei einzig und allein handelt, ist doch lediglich die: Giebt es Functionen, die auch nur an irgend einer einzigen Stelle endliche Differentialquotienten²⁾ jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch nicht nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind? Denn aus einer Function, die eine derartige Singularität an einer Stelle besitzt, lassen sich ja dann nach bekannten Methoden — etwa mit Hilfe des von Herrn Cantor angegebenen Condensations-Principes³⁾ — leicht solche bilden, bei denen die nämliche Singularität in allen Punkten einer beliebigen abzählbaren unendlichen Menge auftritt.

Nun hat aber im Gegensatz zu Lagrange, welcher geradezu die Ansicht aussprach,⁴⁾ dass die Endlichkeit von $f^{(\nu)}(x)$ für jedes endliche ν die Gültigkeit der Entwicklung:

1) Es heisst a. a. O.: Autant que je sache, toutes les fonctions qui n'existent que dans un certain domaine du plan et qui ont été étudiées jusqu'ici, cessent d'exister, parce que les fonctions elles-mêmes ou leurs dérivées deviennent discontinues sur la frontière.

2) Selbstverständlich handelt es sich hierbei im Falle einer complexen Variablen nicht um Differentialquotienten nach allen möglichen Richtungen, sondern nur nach einem Theil dieser Richtungen.

3) Math. Ann. Bd. XIX. p. 588.

4) Théorie des Fonctions. Chap. V. Art. 30 (Oeuvres complètes, T. IX p. 65). — Leçons sur le Calcul des Fonctions. Lec. III (Oeuvres compl. T. X. p. 72.)

Immerhin bin auch ich der Ansicht, dass jenes Cauchy'sche Beispiel nicht ausreicht, um die Existenz einer nicht entwickelbaren Function mit Quotienten schlechthin evident aber thatsächlich vollständig Bois Reymond im Jahre 1873 Function,¹⁾ welche an einer stetige Differentialquotienten je während die mit diesen Differenz-

lor'sche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^{\nu}$ für jedes noch so kleine h divergirt, woraus dann mit Leichtigkeit folgt, dass $f(x+h)$ in der Umgebung dieser Stelle x überhaupt nicht nach Potenzen von h entwickelt werden kann. Und da Du Bois Reymond es auch unternommen hat, aus dieser Function durch „Condensation“ eine andere abzuleiten, welche die fragliche Eigenschaft in unendlich vielen, überall dicht liegenden Punkten einer Linie hat, so scheint mir eben die oben citirte Bemerkung des Herrn Mittag-Leffler nicht recht zutreffend.

Auf der anderen Seite hätte ich gegen die von ihm mitgetheilte Reihe des Herrn Fredholm, deren elegante Einfachheit ich nochmals ausdrücklich anerkenne, vom didaktischen Standpunkte mancherlei einzuwenden. Zunächst scheint mir schon der Beweis dafür, dass jene Reihe die fragliche Eigenschaft besitzt, nicht elementar genug: er beruht auf einem, keineswegs mehr den Elementen der Functionen-Theorie angehörigen Kowalewski'schen Satze über die Integrale partieller Differential-Gleichungen. Zweitens aber bietet diese Methode der Herleitung den grossen Nachtheil, dass wir von der Art und Weise des Zustandekommens einer solchen, doch immerhin merkwürdigen Singularität auch nicht die geringste Anschauung erhalten.

1) In den Abb. der b. Akad. Desgl. Bd. XXI dieser Zeitschrift. p. 100 ff.

§ 1.

Für das Innere eines gewissen Bereichs der complexen Variablen x sei $f(x)$ mit sämtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) durch irgendwelche analytische Ausdrücke als eindeutige reguläre analytische Function definirt — z. B. durch gleichmässig convergirende Reihen von der Form $\sum f_\nu(x)$ bzw. $\sum f_\nu^{(n)}(x)$, wo die $f_\nu(x)$ in dem gedachten Bereiche reguläre algebraische oder transscendente Functionen bedeuten.

Auf der Begrenzung dieses Bereiches befinde sich eine Stelle α , für welche $f(x)$ mit sämtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n noch eindeutig bestimmt, endlich und stetig sei. Wenn dann eine für irgendwelche Umgebung von $x = \alpha$ convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - \alpha)$ existirt, dergestalt dass die Beziehung:

$$(1) \quad f(x) = \mathfrak{P}(x - \alpha)$$

besteht für denjenigen Theil des Convergenz-Bezirktes von $\mathfrak{P}(x - \alpha)$, welcher in den ursprünglichen Definitions-Bereich von $f(x)$ hineinfällt, so hat dieselbe sicher die Form:

$$(2) \quad \mathfrak{P}(x - \alpha) = \sum_0^\infty \frac{f^{(v)}(x)}{v!} (x - \alpha)^v.$$

Daraus folgt aber, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ im Punkte α gemachten Voraussetzungen zwei und nur zwei Möglichkeiten denkbar sind, unter denen keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - \alpha)$ von der gedachten Beschaffenheit existiren kann, nämlich:

1. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(v)}(\alpha)}{v!} (x - \alpha)^v$ für $|x - \alpha| < \varepsilon$ divergirt, wie klein man auch die positive Grösse ε annehmen möge.

Und es lassen sich auch mit Leichtigkeit hinreichende Bedingungen für die Art des Unendlichwerdens von $f^{(n)}(\alpha)$ für $n = \infty$ aufstellen, welche die Convergenz der obigen Reihe für jede noch so kleine Umgebung der Stelle α definitiv ausschliessen.

So folgt z. B. aus dem Cauchy'schen Fundamental-Kriterium zweiter Art, dass die Reihe für kein noch so kleines $|x - \alpha|$ convergiren kann, wenn für $\nu = \infty$

$$\lim \left\{ \frac{|f^{(\nu-1)}(\alpha)|}{(\nu-1)!} : \frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \right\} = \lim \left\{ \nu \cdot \left| \frac{f^{(\nu-1)}(\alpha)}{f^{(\nu)}(\alpha)} \right| \right\} = 0$$

wird, oder anders geschrieben:

$$\left| \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)} \right| > \nu$$

eine Bedingung, die sicher erfüllt ist, wenn von einer beliebigen Stelle $\nu \geq n$ ab:

$$(3) \quad \left| \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)} \right| = \nu \cdot \psi(\nu)$$

ist, wo $\psi(\nu)$ eine positive Grösse bedeutet, die mit ν — wenn auch beliebig langsam in's Unendliche wächst.

Geht man, statt von dem Cauchy'schen Kriterium, von der Bemerkung aus, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} (x - \alpha)^\nu$ sicher beständig divergirt, wenn für jedes noch so kleine positive ϵ und für $\nu \geq n$ die Beziehung besteht:

$$\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \cdot \epsilon^\nu > 1$$

so gelangt man statt der Bedingung (3) zu der folgenden:

$$(4) \quad \frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} > (\psi(\nu))^\nu$$

welche, wegen $\nu! < \nu^\nu$, a fortiori erfüllt ist, falls für $\nu > n$:

Bereich, welcher den Punkt $x=0$ auf der Begrenzung enthält einschliesslich dieser Begrenzung, sofern nur keine weitere Stelle der Strecke $0(-1)$ im Inneren oder auf der Begrenzung jenes Bereiches liegt. Denn in der That wird für alle solchen Werthe x der absolute Betrag von $\frac{1}{a^{-\nu} + x}$ eine Grösse von der Form $\lambda \cdot a^\nu$ (wo λ endlich) nicht übersteigen, woraus dann ohne Weiteres die gleichmässige Convergenz der Reihe in dem behaupteten Umfange resultirt.

Das gleiche gilt von jeder Reihe, die sich durch n malige Differentiation aus der obigen ergibt, sodass also auch:

$$(7) \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(a^{-\nu} + x)^{n+1}}$$

gesetzt werden kann. Daraus folgt aber für $x=0$:

$$(8) \quad \begin{cases} f(0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} a^\nu = e^a \\ f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n! \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} a^{\nu(n+1)} = (-1)^n \cdot n! e^{a^{n+1}} \end{cases}$$

also für hinlänglich grosse Werthe von n sicher:

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} > (e^n)^n$$

woraus auf Grund der oben aufgestellten Bedingung (4) sofort erkannt wird, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$ für jedes noch so kleine x divergirt, obschon $f(x)$ für $x=0$ mit sämtlichen Ableitungen von jeder endlichen Ordnung endlich und ausser in der Richtung der negativen reellen Axe auch durchweg stetig ist.

Man bemerkt, dass bei der eben betrachteten Reihe die auf der negativen reellen Axe gelegenen Punkte $-a^0, -a^{-1},$

nach meinem Dafürhalten auch deshalb, weil das so definirte $f(0)$ mit allen Ableitungen den besonderen Werth Null hat, sodass von einer convergirenden Mac Laurin'schen Reihe auch wiederum nur cum grano salis die Rede sein kann, da dieselbe formal eigentlich gar nicht existirt — ein Mangel, der durch Einführung einer Function von der Form $f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x}}$ (wo $\varphi(x)$ entwickelbar) zwar verdeckt, aber in seinem Wesen doch nicht gehoben wird.

Man erhält nun aber völlig einwandfreie Beispiele dieser Art, wenn man in den oben betrachteten Reihen (6) und (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ ersetzt. Auf diese Weise entsteht aus (6):

1) Dieser Einwand wird auch durch das Raisonement des Herrn Hermite (Cours d'Analyse, T. I. p. 203) nicht entkräftet.

Die Ma
ständig
Bezeich

(16)

so stim
überein.

(17)

so liefer
erste h
endliche
tungen
eigent
nicht
besitzt,

schwinden, obschon sie für $x = 0$ mit sämtlichen Ableitungen verschwindet. Damit erscheint aber die von Lagrange im 5. Capitel seiner *Théorie des Fonctions*¹⁾ geäußerte Ansicht, dass eine stetige Function, welche für irgend einen Werth der Variablen mit sämtlichen Ableitungen verschwindet, identisch verschwinden müsse, nunmehr endgültig widerlegt.

§ 2.

Der allgemeine Typus der im vorigen Paragraphen betrachteten Reihen lautet offenbar:

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{c_v}{\alpha_v - x}$$

1) *Oeuvres complètes*, T. IX, p. 63.

Es sei nun irgend ein einfach zusammenhängendes von einer Curve C begrenztes Flächenstück gegeben, welches keinen Punkt der abzählbaren Menge (α_n) im Innern oder auf der Begrenzung enthält, während auf der letzteren der eine Grenzpunkt a (aber kein weiterer, falls solche vorhanden) sich befinden soll. Ist dann $\sum |c_n|$ convergent, so stellt nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass die obige Reihe eine innerhalb C reguläre analytische Function dar. Dies gilt aber auch noch für jeden Punkt x' auf der Curve C — mit eventueller Ausnahme des einen Punktes a . Denn da nach Voraussetzung x' weder der Menge (α_n) angehört, noch ein Grenzpunkt derselben sein kann, so existiert stets eine gewisse Umgebung von x' , innerhalb deren kein Punkt der Menge (α_n) liegt, sodass also $f(x)$ für diese Umgebung wiederum regulär bleibt.

Um nun das Verhalten von $f(x)$ für die Stelle $x=a$ zu untersuchen, bemerkt man zunächst, dass allemal, wenn nur der Punkt a durch einer der Menge selbst angehörig ist, $f(x)$ in a eine singuläre Stelle besitzt, d. h. die Function in a nicht stetig ist. Ist a ein Grenzpunkt der Menge (α_n) , ohne selbst dazugehörig zu sein, so erkennt dies, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man die obige Reihe abwechselnd mit $x=a$ und $x=b$ setzt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n a^n = f(a) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n b^n = f(b).$$

$$\text{Nun ist } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{b^n} = 0, \quad \text{da } \frac{a}{b} < 1 \text{ wird.}$$

$$\text{Nun ist } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{b^n} = 0, \quad \text{da } \frac{a}{b} < 1 \text{ wird.}$$

Nun ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{b^n} = 0$, da $\frac{a}{b} < 1$ wird. Nach dem Satze von Weierstrass ist $f(x)$ in a regulär.

gewissen um α zu beschreibenden Kreises der Fall sein. Dies ist aber in Folge der über die Vertheilung der α , gemachten Voraussetzung unmöglich, da nach dem angeführten Satze innerhalb jenes Kreises stets singuläre Punkte oder Linien von $f(x)$ liegen müssen.

Die Möglichkeit dieser Schlussweise bleibt aber unverändert bestehen, wenn an die Stelle des einen Grenzpunktes α eine beliebige Anzahl solcher Punkte tritt, die auch auf C oder irgend einem Bogen von C überall dicht liegen dürfen, sofern nur die Punkte α , in der Umgebung jedes solchen Punktes α der oben angegebenen Bedingung genügen, und es gilt somit der folgende Satz:

Befinden sich auf der geschlossenen Curve C beliebig viele Grenzpunkte α der durchweg ausserhalb des Bereiches (C) gelegenen Punktmenge (α), so ist für die innerhalb (C) reguläre analytische Function:

$$f(x) = \sum_0^\infty \nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} \quad (\text{wo } \sum_0^\infty \nu |c_\nu| \text{ convergent})$$

jeder Punkt α ein singulärer Punkt und jeder Curvenbogen von C , auf dem Punkte α überall dicht liegen, eine singuläre Linie, sofern in beliebiger Nähe jedes Punktes α stets Punkte α , vorhanden sind, welche höchstens in Linien (nicht in Flächentheilen) überall dicht liegen.

Beispiele solcher Punktmenge sind:

$$\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \quad \alpha_{\mu, \nu} = p_\mu \varepsilon^\nu \quad \left(\begin{array}{l} \nu = 1, 2, 3 \dots \\ \mu = 1, 2, 3 \dots \end{array} \right)$$

wo p_ν positiv und für jedes endliche $\nu > 1$, dagegen $\lim_{\nu=\infty} p_\nu = 1$ (z. B. $p_\nu = 1 + \frac{1}{\nu}$, $p_\nu = 1 + \frac{1}{2^\nu}$, $p_\nu = e^{\frac{1}{\nu}}$ etc.), während ε eine complexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1,

Setzt man zur Abkürzung:

$$(4) \quad \frac{1}{|\alpha_v| - 1} = q_v \quad \text{d. h.} \quad |\alpha_v| = 1 + \frac{1}{q_v}$$

wo also q_v wesentlich positiv und für $v = \infty : \lim q_v = \infty$ oder die obere Unbestimmtheitsgrenze von q_v unendlich wird, so hat man identisch:

$$(5) \quad \frac{|c_v|}{(|\alpha_v| - 1)^m} = |c_v| \cdot q_v^m = |c_v \cdot r_v| \cdot \frac{q_v^m}{r_v}$$

und wenn daher r_v positiv und so gewählt wird, dass für jedes noch so grosse:

$$(6) \quad \lim_{v=\infty} \frac{q_v^m}{r_v} = \lim_{v=\infty} \frac{(e^m)^{\frac{1}{2}q_v}}{r_v} = 0$$

Einheitskreise beliebig viele Grenzpunkte, so lassen sich auf mannigfache Weise unendliche Reihen von Grössen c_r stets so bestimmen, dass die Reihen:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{c_r}{\alpha_r - x} \quad f^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty \frac{c_r}{(\alpha_r - x)^{n+1}}$$

nicht nur im Innern, sondern auch auf der Peripherie unbedingt und gleichmässig convergiren und in die eben daselbst unbedingt und gleichmässig convergirenden Potenzreihen:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty A_\lambda x^\lambda \\ f^{(n)}(x) &= \sum_n^\infty \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) \cdot x^{\lambda-n} \end{aligned} \right\} \text{ wo: } A_\lambda = \sum_0^\infty \frac{c_r}{\alpha_r^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden können.

Bedeutet dann α einen auf der Peripherie befindlichen Grenzpunkt der α_r von solcher Beschaffenheit, dass in jeder Nähe von α stets Punkte α_r vorhanden sind, welche höchstens in Linien, nicht aber in Flächentheilen, überall dicht liegen, so existirt keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ derart dass die Gleichung $f(x) = \mathfrak{P}(x-\alpha)$ besteht für Punkte in beliebiger Nähe von α , die im Innern oder auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Wenn also solche Punkte α auf der Peripherie überall dicht liegen (sodass schliesslich jeder Punkt der Peripherie als ein Grenzpunkt der Menge (α_r) anzusehen ist), so existirt für $f(x)$ keine analytische Fortsetzung über die Peripherie des Einheitskreises hinaus, obschon $f(x)$ mit sämt-

$$f(x) = \sum_1^n \frac{x^p}{\frac{1}{p!} + \frac{1}{(p+1)!} + \dots + \frac{1}{(p+n)!}} = \sum_1^n A_1 x^p \\ = A_1 x^p + A_2 x^{p+1} + \dots + A_n x^{p+n}$$

Diese Reihen sind für das ganze Gebiet zwischen der inneren und äußeren Peripherie der Kreise, welche innerhalb der Punkte bestehen. Zwischen dem Wert der Reihe $f(x)$ im Inneren und außerhalb des Einheitskreises existiert jedoch keine „unwiderstehliche“ Zusammenhang.

Es werde ferner gesetzt:

$$a_{a,p} = p_a x^p$$

wo etwa wiederum $p_a = 1 + \frac{1}{a}$ oder $p_a = a^{\frac{1}{a}}$ ($a = 1, 2, 3, \dots$) mit a gleichfalls die frühere Bedeutung hat. Bildet man also:

$$f(x) = \sum_1^n \sum_1^n \frac{a_{a,p}}{p_a x^p} x$$

so erkennt man leicht, dass die gleichmäßige Convergence von $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ auf der Peripherie wiederum erhalten bleibt, wenn man etwa setzt:

§ 4.

Ich gehe nun dazu über, einen weiteren Typus von Reihen anzugeben, welche auf der Grenze eines gewissen Bereiches noch mit allen Ableitungen endlich und stetig, dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind. Obgleich dieselben mit den Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen nicht in unmittelbarem Zusammenhange stehen, so liefern sie doch eine sehr brauchbare Illustration zu den im § 1 entwickelten Principien, indem sie bei ausserordentlicher formaler Einfachheit auf dem Wege ganz elementarer Rechnung deutlich erkennen lassen, warum die Entwickelbarkeit auf jener Grenzlinie vollständig aufhört: nämlich, weil die Ableitungen n^{ter} Ordnung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen mit n so stark zunehmen, dass die Taylor'sche Reihe nicht mehr convergirt.

Es werde gesetzt:

$$(1) \quad \psi(t) = \sum_0^{\infty} \nu \frac{1}{\nu!} e^{a^{\nu} t} = \sum_0^{\infty} \nu u_{\nu}$$

wo a eine positive ganze Zahl > 2 , $t = \tau_1 + \tau_2 i$ eine complexe Variable bedeutet. Um den Convergencebereich dieser Reihe zu erkennen, hat man:

$$\begin{aligned} \frac{u_{\nu+1}}{u_{\nu}} &= \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{a^{\nu}(a-1)ti} \\ &= \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{-a^{\nu}(a-1)\tau_2} \cdot e^{a^{\nu}(a-1)\tau_1 i} \end{aligned}$$

und daher für $\nu = \infty$:

$$\lim \left| \frac{u_{\nu+1}}{u_{\nu}} \right| = \lim \frac{e^{-a^{\nu}(a-1)\tau_2}}{\nu+1} \begin{cases} = 0, & \text{wenn } \tau_2 > 0 \\ = \infty, & \text{wenn } \tau_2 < 0 \end{cases}$$

d. h. die Reihe convergirt absolut für alle t mit nicht-negativem imaginärem Bestandtheil, also innerhalb der oberen

Halbebene einschliesslich der reellen Axe. Das Gleiche gilt auch für sämtliche Ableitungen von $\psi(t)$. Man hat nämlich:

$$(2) \quad \psi^{(n)}(t) = i^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} a^{n+\nu} \cdot e^{a^\nu t i}$$

und daher insbesondere für reelle t :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\nu!} a^{n+\nu} \cdot e^{a^\nu t i} \right| = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} a^{n+\nu} = e^{a^n}$$

sodass also die Reihe für $\psi^{(n)}(t)$ auch auf der ganzen reellen Axe absolut convergirt. Es stellt hiernach $\psi(t)$ für die obere Halbebene eine analytische Function von t dar, welche noch auf der Grenze dieses Bereiches, nämlich der reellen Axe, mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Nichtsdestoweniger lässt sich leicht zeigen, dass $\psi(t)$ über diesen Bereich nicht analytisch fortgesetzt werden kann.

Setzt man zunächst in (2) $t = 2x\pi$ ($x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$), so folgt:

$$|\psi^{(n)}(2x\pi)| = e^{a^n}$$

und ebenso für $t = (2x+1)\pi$:

$$|\psi^{(n)}((2x+1)\pi)| = e^{a^n} \text{ bzw. } = e^{a^n} - 2 \text{ (ersteres, wenn } a \text{ ungerade, letzteres, wenn } a \text{ gerade).}$$

Daraus erkennt man aber zunächst, dass die Taylor'sche Reihe für sämtliche Stellen $t = \mu\pi$ ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) divergirt (cf. § 1, Gl. (5)).

Das Gleiche findet nun aber statt für alle Stellen $t = \frac{\mu\pi}{a^p}$, wenn p eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Setzt man nämlich $\psi^{(n)}(t)$ in die Form:

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(t) &= i^n \cdot \sum_0^{p-1} \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_p^\infty \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} \\ &= i^n \cdot \sum_0^{p-1} \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_0^\infty \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} e^{a^{p+\nu} t i}\end{aligned}$$

so ergibt sich zunächst für $t = \frac{2x\pi}{a^p}$ ($x = \pm 1, \pm 2 \dots$):

$$\begin{aligned}(3) \quad \psi^{(n)}\left(\frac{2x\pi}{a^p}\right) &= i^n \cdot \sum_0^{p-1} \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu \cdot \frac{2x\pi}{a^p} i} + i^n \cdot \sum_0^\infty \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} e^{a^{p+\nu} \cdot \frac{2x\pi}{a^p} i} \\ &= i^n \{ C_{p,n} + e^{a^n} \}\end{aligned}$$

wo:

$$C_{p,n} = \sum_0^{p-1} \frac{a^{n\nu}}{\nu!} \left\{ e^{a^\nu \cdot \frac{2x\pi}{a^p} i} - 1 \right\}$$

Nun ist aber:

$$(4) \quad |C_{p,n}| < 2 \cdot \sum_0^{p-1} a^{n\nu} < 2 \cdot \frac{a^{pn} - 1}{a - 1} < 2 \cdot a^{pn}$$

folglich wird, wie gross man auch p annehmen mag, n stets so gross genommen werden können, dass der in (3) vorkommende Term e^{a^n} beliebig viel grösser ist als $|C_{p,n}|$; dies gilt selbst dann noch, wenn man p über alle Grenzen wachsen lässt, sobald man nur $n > p$ nimmt. Somit folgt aus (3) und (4), dass für unendlich wachsende n

$$(5) \quad \psi^{(n)}\left(\frac{2x\pi}{a^p}\right) \sim e^{a^n}$$

wird, und das Nämliche ergibt sich auf analoge Weise auch für $\psi^{(n)}\left(\frac{(2x+1)\pi}{a^p}\right)$. In Folge dessen muss aber die Taylor'sche Reihe für $\psi(t)$ an allen Stellen $t = \frac{m\pi}{a^p}$ divergiren.

Man findet nun aber ganz analog wie oben Gl. (3), dass

$$(7) \quad \left| \psi^{(n)} \left(\frac{m + \frac{1}{2}}{a^p} \pi \right) \right| \leq C'_{p,n} + e^{-a^n}$$

wo:

$$(8) \quad C'_{p,n} < a^{pn}$$

und da, wie gross man auch p nehmen möge, die Reihe mit dem allgemeinen Gliede: $\frac{1}{n!} \left\{ a^{pn} + e^{-a^n} \right\} r^n$ für jedes noch so grosse r convergirt, so folgt, dass die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(v)}(t_0)}{v!} (t - t_0)^v$ für alle Stellen $t_0 = \frac{(m + \frac{1}{2})\pi}{a^p}$ d. h. schliesslich für unendlich viele, überall dicht liegende Punkte der reellen Axe convergirt und zwar sogar beständig convergirt. Da aber in beliebiger Nähe jeder solchen Stelle andere liegen, für welche nach dem zuvor gesagten die Taylor'sche Reihe divergirt, so kann sie nicht die Summe $\psi(t)$ haben.

Hieran knüpft sich naturgemäss die Frage, ob es denkbar wäre, dass die Taylor'sche Reihe für alle Stellen eines gewissen Intervalles convergirte oder genauer gesagt, ein Convergence-Intervall besitzt, dessen Ausdehnung unter eine bestimmte angebbare Grösse nicht herabsinkt, und dass ihre Summe nichtsdestoweniger mit der erzeugenden Function nicht übereinstimme?

Diese Frage ist aber zu verneinen. Angenommen nämlich, es convergire die Reihe:

$$\sum_0^{\infty} \frac{\psi^{(v)}(t)}{v!} \cdot r^v$$

für $t_0 < t < t_1$ und $r < r_1$, so hat man sicher für alle Werthepaare (t, r) aus dem angegebenen Bereiche:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi^{(n)}(t)}{n!} r^n = 0$$

Der Satz gilt offenbar auch für den Fall einer complexen Variablen t . Denn man kann die Gesamtheit der Stellen, welche auf irgend einer im Punkte t_0 beginnenden geradlinigen Strecke liegen, durch eine ganze lineare Substitution auf ein Stück der reellen Axe congruent abbilden und sodann wieder die oben benützte Schlussweise anwenden.

Bei dem oben betrachteten Beispiel:

$$(1) \quad \psi(t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{a^{\nu} t}$$

tritt also — wenn $a = 4k + 3$ — thatsächlich der Fall ein, dass in jedem noch so kleinen Intervalle Stellen liegen, für welche der Convergenz-Radius der Taylor'schen Reihe unendlich gross ist (nämlich für $t = \frac{(m + \frac{1}{2})\pi}{a^p}$), und ebenfalls solche, für welche dieselbe gleich Null ist (nämlich für $t = \frac{m\pi}{a^p}$).

Ersetzt man in (1) t durch $(-t)$, so wird die Reihe:

$$(12) \quad \psi(-t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{-a^{\nu} t}$$

eine analytische Function darstellen, welche nur für die untere Halbebene einschliesslich der reellen Axe mit sämtlichen Ableitungen existirt, und es ergeben sich durch Addition und Subtraction von $\psi(t)$ und $\psi(-t)$ (wobei, wie man leicht erkennt, die fraglichen Singularitäten sich nicht etwa herausheben können), die Reihen:

$$(13) \quad \psi_1(t) = \sum_0^{\infty} \frac{\cos a^{\nu} t}{\nu!} \quad \psi_2(t) = \sum_0^{\infty} \frac{\sin a^{\nu} t}{\nu!}$$

den Falle offenbar eine unstetige Function von t ist, so brauchte in der That keine bestimmte Stelle t' zu existiren, wo derselbe wirklich $= 0$ wird.

als Beispiele von Functionen, welche für alle reellen t mit sämtlichen Ableitungen jeder noch so grossen endlichen Ordnung endlich und stetig sind, und dennoch nicht in das complexe Gebiet der Variablen t fortgesetzt werden können.

Setzt man schliesslich in (1) noch $e^{t^i} = x$, so folgt, dass die Function:

$$(14) \quad f(x) = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{1}{\nu!} x^{a_{\nu}}$$

nicht über den Einheitskreis hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, obschon sie noch auf der Peripherie derselben mit allen Anleitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Der allgemeine Typus derartiger Reihen lautet offenbar:

$$(15) \quad f(x) = \sum_{\nu}^{\infty} c_{\nu} \cdot x^{m_{\nu}}$$

wo die m_{ν} positive ganze Zahlen von der Beschaffenheit bezeichnen, dass der grösste gemeinsame Theiler von m_{ν} , $m_{\nu+1}$, $m_{\nu+2}$, \dots mit ν selbst in's Unendliche wächst, während die Coefficienten c_{ν} so beschaffen sein müssen, dass die Reihe:

$$\sum_{\nu} c_{\nu} m_{\nu}^n = S_n$$

für jedes endliche n zwar convergirt, aber ihre Summe mit n so stark zunimmt, dass:

$$\sum_n \frac{S_n}{n!} \varrho^n$$

für jeden noch so kleinen Werth ϱ divergirt.

Die Form, welche die allgemeinen Gleichungen der Flächentheorie in Folge dessen annehmen, steht zwar in naher Beziehung zu den von Aoust und Codazzi¹⁾ eingeführten Gleichungen, durch welche eine gerade für die Anwendungen sehr wichtige geometrische Interpretation derselben erreicht wird, unterscheidet sich aber eben durch den vorhin angeführten principiellen Gesichtspunkt von denselben.

In Beziehung auf orthogonale Curvensysteme auf einer Oberfläche hat übrigens neuerdings Herr Knoblauch²⁾ in einer Arbeit, deren Tendenz sich, soweit sie das Krümmungsmaass betrifft, mit der vorliegenden berührt, an die Bonnet'sche Formel erinnert, welche das Krümmungsmaass durch die geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien ausdrückt.

Nr. 1. Bezeichnet man mit e, f, g die Coefficienten des Längenelementes auf einer Fläche, so ist nach Gauss das Krümmungsmaass K nur abhängig von den Grössen e, f, g , den ersten Differentialquotienten derselben nach den unabhängigen Parametern u, v und den zweiten Differentialquotienten e_{vv}, f_{uv}, g_{uu} . Aus dieser analytischen Thatsache folgt für zwei isometrisch³⁾ auf einander bezogene Flächen die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses.

1) Diese Formeln geben bekanntlich die Fundamentalgleichungen in einer für die Anwendungen ausserordentlich wichtigen Gestalt (vgl. namentlich das grundlegende Mémoire von Bonnet, Journal de l'École Polyt. Bd. 25 und 26, sowie die Théorie générale des surfaces von Ribaucour, Journ. v. Liouville Ser. IV, tom. 7), insofern nur geometrische Grössen, nämlich die normale und geodätische Krümmung, sowie die geodätische Torsion der Coordinatenlinien in denselben auftreten, entfernen sich aber eben durch die Einführung dieser grösstentheils nicht invarianten Elemente von der Beziehung auf das Längenelement.

2) Ueber die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen, Acta Mathematica Bd. 15 S. 249.

3) Der Kürze wegen nenne ich zwei auf einander abwickelbare Flächen isometrisch auf einander bezogen oder isometrisch.

ruht, bei dessen Deformation der Excess der Kantenwinkel an den Eckpunkten ungeändert bleibt, liefert eine mit dem geometrischen Character der Fläche im engsten Zusammenhang stehende Deutung für den Zähler des Krümmungsmaasses. Aehnliche Ueberlegungen finden sich indessen auch in Herrn Sturm's Note, in der auf Grund Steiner'scher Betrachtungen die Fläche als Grenze eines Polyeders aufgefasst und der Begriff der Ecken und Kantenkrümmung desselben eingeführt wird.

Nr. 2. Während bei diesen Untersuchungen allerdings die gehäufte Betrachtung infinitesimaler Beziehungen nicht wohl zu vermeiden ist, so namentlich in der Natani'schen Darstellung, der man wohl in mehrfacher Beziehung eine strengere Form wünschen möchte,¹⁾ bringen andere Formeln in analytischer Darstellung, aber in directer Beziehung auf geometrisch invariante Elemente, die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses zum Ausdruck.

So besteht nach Bertrand und Puiseux für den Excess E der Länge einer hinreichend kleinen geodätischen den Flächenpunkt umgebenden Kreislinie mit dem Radius s über die Peripherie einer ebenen Kreislinie mit demselben Radius, dividirt durch die $\frac{2}{3}$ Potenz des Inhaltes J jenes geodätischen Kreises die Formel

$$\lim \left(\frac{E}{J^{\frac{2}{3}}} \right)_{s=0} = - \frac{K}{3 \sqrt{\pi}} \quad ^2)$$

welche K direct durch den Grenzwert des Verhältnisses zweier bei der Biegung invarianter Grössen ausdrückt.

Nach Beltrami³⁾ gilt für den Bogen ϱ einer von einem

1) Eine solche wurde mir übrigens unlängst durch Herrn Finsterwalder mitgetheilt.

2) Vgl. Monge, Applications, Ausg. v. Liouville, S. 583 u. f. Der Satz selbst ist dort freilich auf andere Art ausgedrückt.

3) Beltrami, Zur Theorie des Krümmungsmaasses, Math. Annalen Bd. I, S. 580. Die Beltrami'sche Darstellung von K durch

Darboux¹⁾ ausführlich in seiner *Théorie générale des surfaces* dargelegt hat, eine sehr bemerkenswerthe Interpretation erfahren.

Herr Darboux denkt sich in Verbindung mit der Fläche ein rechtwinkeliges Raumkoordinatensystem — *trièdre trirectangle* — dessen *s*-Axe die Normale des Flächenpunktes ist, und dessen *x*-Axe in der Tangentenebene der Fläche einen Winkel *m* mit der Curve *u* bildet. Schreitet man auf der letzteren fort, so geht dasselbe in eine benachbarte Lage über. Ist nun *r du* die Rotationscomponente um die *s*-Axe, welche, abgesehen von einer geeigneten Translation, in Verbindung mit zwei anderen analogen partiellen Rotationen *p du*, *q du* um die Axen *x* und *y* jenes System aus der ursprünglichen Lage in die zweite überführt, und bezeichnet man mit *r' dv* die dem Fortschreiten auf der Curve *v* entsprechende Rotationscomponente, so ergibt sich für den Ausdruck

$$K \sin \alpha \sqrt{e g}$$

— unter *α* den Winkel der Coordinatenlinien *u*, *v* verstanden die elegante Formel²⁾

$$K \sin \alpha \sqrt{e g} = \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r'}{\partial u}$$

Nun hängen freilich die Rotationen *r* und *r'*, sowie auch die von Herrn Darboux eingeführten Translationscomponenten des Trieders nur vom Längenelemente ab. Sie sind aber nur analytische Invarianten, wie auch schon aus dem Anblick der für *K* angeführten Formel hervorgeht, welche neben den Differentialquotienten nach *u*, *v* auch noch die Coefficienten *e*, *g* enthält, während die übrigen in Darboux'

1) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Tom. I, Tom. II S. 361—387.

1) a. a. O. S. 364.

Krümmung der Flächen, allerdings in anderer Richtung, betrachtet hatte.¹⁾

Nr. 5. Bezeichnet man das Längenelement der Fläche, welche auf zwei willkürliche Curvensysteme u, v bezogen ist, durch

$$1) \quad ds^2 = e du^2 + 2 f du dv + g dv^2$$

und die Differentialquotienten der e, f, g sowie der Coordinaten x, y, z , wie in Nr. 4, durch angehängte Indices, so hat man bekanntlich die Gleichungen

$$2) \quad \begin{aligned} x_{uu} &= A x_u + A_1 x_v + E p, \\ x_{uv} &= B x_u + B_1 x_v + F p, \\ x_{vv} &= C x_u + C_1 x_v + G p \end{aligned}$$

nebst den analogen für y, z und q, r , wobei E, F, G , die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung, p, q, r die Richtungs-cosinus der Normale bedeuten, und die charakteristischen Coefficienten $A; A_1; B, B_1; C, C_1$ durch die Gleichungen

$$3) \quad \begin{aligned} 2 A H &= q e_u - 2 f f_u + f e_v, \\ 2 A_1 H &= 2 e f_u - e e_v - f e_u, \\ 2 B H &= g e_v - f g_u, \\ 2 B_1 H &= e g_u - f e_v, \\ 2 C H &= 2 g f_v - g g_u - f g_v, \\ 2 C_1 H &= 2 g_v - 2 f f_v + f g_u \end{aligned}$$

in denen

$$e g - f^2 = H$$

gesetzt ist, definirt sind. Dabei finden zwischen den charakteristischen Coefficienten die Gleichungen

1) Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Klein, Annalen 59. S. 200.

$$\begin{aligned}
 B + C_1 &= \frac{\partial l \sqrt{H}}{\partial v} \\
 B_1 + A &= \frac{\partial l \sqrt{H}}{\partial u} \\
 4) \quad A_1 \frac{f}{e} &= B_1 - \frac{\partial l \sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial u} \\
 C \frac{f}{g} &= B - \frac{\partial l \sqrt{\frac{H}{g}}}{\partial v}
 \end{aligned}$$

statt, und zugleich hat man für die Differentialquotienten der p, q, r die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 5) \quad p_u &= L x_u + L_1 x_v \\
 p_v &= M x_u + M_1 x_v
 \end{aligned}$$

in denen

$$\begin{aligned}
 6) \quad L H &= F f - g E \\
 L_1 H &= E f - F e \\
 M H &= G f - F g \\
 M_1 H &= F f - G e
 \end{aligned}$$

ist. Die geodätischen Krümmungen γ, γ_1 der Curven u, v sind alsdann

$$7) \quad \gamma = \frac{A_1 \sqrt{H}}{e \sqrt{e}}, \quad \gamma_1 = \frac{C \sqrt{H}}{g \sqrt{g}}$$

ihre reciproken Werthe sind die Radien der geodätischen Krümmung der Parameterlinien. Ich denke mir ferner im Punkte $P(x, y, z)$ der Fläche die Tangente an die Curve u gezogen. Die Coordinaten eines um r_1 von P entfernten Punktes auf derselben sind

$$\begin{aligned}
 X &= x + \frac{r_1 x_u}{\sqrt{e}} \\
 8) \quad Y &= y + \frac{r_1 y_u}{\sqrt{e}} \\
 Z &= z + \frac{r_1 z_u}{\sqrt{e}}
 \end{aligned}$$

und diejenige Normalebene der Fläche, welche jene Tangente in sich enthält, hat die Gleichung

$$N = \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ p & q & r \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$N = (X-x, p, x_u) = 0.$$

Hieraus ergibt sich für die unendlich benachbarte Normalebene $N + dN_v$, welche dem Fortschreiten auf der Curve v entspricht, die Gleichung

$$N + [(X-x, p, x_u) + (X-x, p_v, x_u) - (x_v, p, x_u)] dv = 0.$$

Trägt man in die letztere die Ausdrücke 8) an Stelle von $X-x, \dots$ ein, so ergibt sich für die Entfernung, in welcher die Tangente der Curve u von der benachbarten Normalebene längs der Curve v geschnitten wird, die Formel

$$9) \quad r_1 = -\frac{\sqrt{e}}{B_1}$$

und ebenso erhält man für den analogen Werth r die Gleichung

$$r = -\frac{\sqrt{g}}{B}.$$

Allerdings sind diese „Radien“, welche für isometrische Flächen ungeändert bleiben, bisher wie es scheint in der Flächentheorie nicht beachtet worden. Die

$$\begin{aligned}
 10) \quad & -\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \sqrt{g}(\gamma_1 - e_1 \sin \alpha) = \sqrt{H}\left(\frac{C}{g} + \frac{B_1}{e}\right) \\
 & -\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \sqrt{e}(\gamma - e_1 \sin \alpha) = \sqrt{H}\left(\frac{A_1}{e} + \frac{B}{g}\right)
 \end{aligned}$$

oder, wenn man die Bogenelemente $ds = \sqrt{e} du$, $ds_1 = \sqrt{g} dv$ einsetzt

$$\begin{aligned}
 10^*) \quad & -\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \gamma - e_1 \sin \alpha \\
 & -\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = \gamma_1 - e_1 \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Die vier Grössen e, e_1, γ, γ_1 sind indessen noch durch eine weitere Gleichung mit einander verbunden. Man erhält dieselbe durch Bildung der Integrabilitätsbedingung der Gleichungen 10). Aus den Gleichungen 9) oder

$$e = -\frac{B}{\sqrt{g}}, \quad e_1 = -\frac{B_1}{\sqrt{e}}.$$

folgt nämlich mit Hülfe der in 3) gegebenen Ausdrücke für B und B_1

$$\begin{aligned}
 11) \quad & -\frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} = e + e_1 \cos \alpha \\
 & -\frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = e_1 + e \cos \alpha
 \end{aligned}$$

also, wenn man die Gleichungen 10) nach u und v differentiirt und die Ausdrücke 11) auf der rechten Seite substituirt,

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v \sqrt{eg}} &= \frac{\partial \gamma_1}{\partial s} - \frac{\partial e_1}{\partial s} \sin \alpha + (e_1 \gamma - e \gamma_1) \cos \alpha - e_1 \gamma_1 + e_1^2 \sin \alpha \\
 &= \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} - \frac{\partial e}{\partial s_1} \sin \alpha - (e_1 \gamma - e \gamma_1) \cos \alpha - e \gamma + e^2 \sin \alpha^1.
 \end{aligned}$$

1) Sind zwei Flächen so auf einander bezogen, dass der Coordinatenwinkel α und die vier Grössen e, e_1, γ, γ_1 in correspondirenden

$$K\sqrt{H} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} - \cos \alpha \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}}{\sqrt{e} \sin \alpha} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \cos \alpha \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}}{\sqrt{g} \sin \alpha} \right)$$

den man vermöge der Gleichungen 3) in die Form

$$\text{II)} \quad K\sqrt{H} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{B_1 \sqrt{H}}{e} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B \sqrt{H}}{g} \right)$$

oder auch, wenn man die Formeln 10) einführt in die Gestalt

$$\text{II')} \quad K\sqrt{H} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{C \sqrt{H}}{g} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{A_1 \sqrt{H}}{e} \right)$$

bringen kann. Durch Addition ergibt sich der von dem zweiten partiellen Differentialquotienten von α nach u und v befreite Ausdruck

$$\text{II'')} \quad 2K\sqrt{H} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{C}{g} - \frac{B_1}{e} \right) \sqrt{H} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{A_1}{e} - \frac{B}{g} \right) \sqrt{H}$$

Nun findet man leicht nach 7) und 9)

$$\frac{C}{g} - \frac{B_1}{e} = \left(\frac{\gamma_1}{\sin \alpha} + e_1 \right) \sqrt{\frac{1}{e}} \\ \frac{A_1}{e} - \frac{B}{g} = \left(\frac{\gamma}{\sin \alpha} + e \right) \sqrt{\frac{1}{g}}$$

1) Die Formeln II, II' lassen unmittelbar die bekannten Eigenschaften der Curvatura integra von Flächenstücken, die von geodätischen oder von äquidistanten Linien begrenzt sind, erkennen. Formel II'' ist nichts anderes als der von Herrn Weingarten für das Krümmungsmaass bemerkte Ausdruck. (Festschrift der Technischen Hochschule, Berlin 1884; Knoblauch, Theorie der krummen Flächen, S. 177).

und die Gleichungen 10^a), I, III stellen nichts anderes vor, als ganz allgemeine Theoreme, die von jedem beliebigen Coordinatensysteme auf einer Oberfläche gelten.

Ist insbesondere der Winkel α constant, so wird nach 10^a)

$$\varrho = \frac{\gamma}{\sin \alpha}, \quad \varrho_1 = \frac{\gamma_1}{\sin \alpha}$$

mithin

$$\begin{aligned} h_1 &= 2 \varrho_1, & h &= 2 \varrho \\ l &= \varrho + \varrho_1 \cos \alpha, & l_1 &= \varrho_1 + \varrho \cos \alpha \end{aligned}$$

also in diesem Falle

$$\text{III')} \quad K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} + \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - (\varrho_1^2 + \varrho^2 + 2 \varrho \varrho_1 \cos \alpha)$$

welche Formel für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in die bekannte Bonnet'sche übergeht.¹⁾

Nr. 8. Ich schliesse hieran noch einige Bemerkungen, die sich aus der Form der Gleichungen I und III ergeben.

Sind die Curven u, v geodätisch, so folgt durch Combination von I und III

$$K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} - \varrho_1^2 = \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - \varrho^2$$

Bei constanter negativer Krümmung $K = -c^2$ wird daher

1) Will man das Krümmungsmaass nur durch die geodätischen Krümmungen und den Winkel α darstellen, so findet man aus II'

$$\begin{aligned} K = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{e g}} + \frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial s_1} - (g_1^2 + g^2 + 2 \cos \alpha g g_1) \\ - \frac{g_1}{\sin \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} - \frac{g}{\sin \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \end{aligned}$$

falls $\gamma = \sin \alpha g, \gamma_1 = \sin \alpha g_1$ gesetzt wird. Wie man sieht, ist dies aber keine Darstellung durch geometrische Invarianten, da die Differentiation nach u und v sich nicht beseitigen lässt.

$$\frac{1}{g\sqrt{e}} \left(f_v - g_u + \frac{f}{2} \frac{\partial l \frac{e}{g}}{\partial v} \right) = \alpha v + \beta$$

$$\frac{1}{e\sqrt{g}} \left(f_u - e_v + \frac{f}{2} \frac{\partial l \frac{g}{e}}{\partial u} \right) = \alpha_1 u + \beta_1$$

in denen $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ Constanten bedeuten, die man gleich Null oder Eins setzen kann, je nachdem die linken Seiten constant oder variabel sein sollen. Die Differentialgleichungen, auf deren Lösung die Bestimmung der Coordinatensysteme beruht, für welche die angegebene Eigenschaft besteht, sind allerdings nicht ganz einfach, und ich werde sie hier nicht weiter untersuchen. Eine einfache Lösung ergibt sich aber in dem Falle, wo man sämtliche Constanten gleich Null setzt, der freilich nur bei einer developpablen Fläche auftreten kann. Alsdann kommt die bezeichnete Aufgabe auf die folgende hinaus:

Alle Curvensysteme in der Ebene zu bestimmen, für die die beiden Ausdrücke

$$f_v - g_u + \frac{f}{2} \frac{\partial l \frac{e}{g}}{\partial v}, \quad f_u - e_v + \frac{f}{2} \frac{\partial l \frac{g}{e}}{\partial u}$$

verschwinden.

Setzt man demgemäss

$$e = x_u^2 + y_u^2, \quad f = x_u x_v + y_u y_v, \quad g = x_v^2 + y_v^2$$

so erhält man durch einfache Umformungen an Stelle dieser beiden Bedingungen die Gleichungen

$$13) \quad \begin{cases} x_u^2 \frac{\partial}{\partial v} \frac{x_v \sqrt{\frac{e}{g}}}{x_u} + y_u^2 \frac{\partial}{\partial v} \frac{y_v \sqrt{\frac{e}{g}}}{y_u} = 0 \\ x_u^2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{x_v \sqrt{\frac{e}{g}}}{x_u} + y_u^2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{y_v \sqrt{\frac{e}{g}}}{y_u} = 0. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$\frac{x_v}{x_u} \sqrt{\frac{e}{g}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{y_u}{x_u}\right)^2}{1 + \left(\frac{y_v}{x_v}\right)^2}} = p$$

$$\frac{y_v}{y_u} \sqrt{\frac{e}{g}} = \frac{\frac{y_v}{x_v}}{\frac{y_u}{x_u}} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{y_u}{x_u}\right)^2}{1 + \left(\frac{y_v}{x_v}\right)^2}} = q$$

und

$$z = \frac{y_u}{x_u}, \quad z' = \frac{y_v}{x_v}$$

so folgt aus dem nach 13) erforderlichen Verschwinden der Functionaldeterminante

$$\frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v}$$

dass p nur von q abhängig ist, oder

$$\sqrt{\frac{1 + z^2}{1 + z'^2}} = \psi \left(z' \sqrt{\frac{1 + z^2}{1 + z'^2}} \right)$$

oder auch

$$z' = F(z)$$

sein muss, wo F eine noch zu bestimmende Function bedeutet. Die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{\frac{1 + z^2}{1 + (F' z)^2}} \right) + z^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{\frac{1 + z^2}{1 + (F' z)^2}} \right) = 0$$

auf welche sich die beiden 13) reduciren, verwandelt sich durch Ausführung der Differentiation und nach einigen Vereinfachungen in

$$[z - F(z)] \left[\frac{1}{1 + z^2} + \frac{1}{1 + (F' z)^2} \frac{\partial F}{\partial z} \right] = 0$$

Da nun die Gleichung

$$s - F(x) = \frac{y_0 x_0 - y_1 x_1}{x_0 x_1} = 0$$

nicht bestehen kann, weil sonst y eine Function von x sein würde, so ergibt sich nur

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dF}{1+F^2} = 0$$

oder

$$\arctg x + \arctg F = \text{const.}$$

Zwischen den Winkeln α und β , welche die Curven u , v in jedem Punkte mit der s -Achse bilden, muss daher die Gleichung

$$\alpha + \beta = \text{const.}$$

erfüllt sein. Man erhält also alle Systeme der verlangten Art, wenn man die eine Schaar von Curven beliebig annimmt und zu derselben eine zweite so bestimmt, dass die Winkelhalbirende des von den Curven beider Schaaren in jedem Punkte gebildeten Winkels eine constante Richtung hat.

Allerdings ist in der vorbergehenden Betrachtung vorausgesetzt, dass x_0 und y_0 nicht Null sind. Ist aber z. B. x_0 gleich Null, so kann nicht zugleich y_0 gleich Null sein, da sonst eine Gleichung zwischen x und y bestände. Der Fall $x_0 = 0$ kann aber stets durch eine Coordinatentransformation beseitigt werden und ist daher in der vorigen Untersuchung schon enthalten.

Nr. 10. Durch das vorstehende haben zugleich die Coefficienten A_1 , C , B , B_1 in den Formeln 1) der Nr. 5 ihre geometrische Bedeutung erhalten. Die Coefficienten A und C_1 haben dagegen überhaupt keine geometrische Bedeutung,

$$14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \cos \lambda}{\partial s'} = q_1 (\cos \lambda \cos \alpha - \cos \lambda') + p S \\ \frac{\partial \cos \lambda'}{\partial s} = q (\cos \lambda' \cos \alpha - \cos \lambda) + p S \end{cases}$$

nebst den analogen Gleichungen für $\cos \mu$ und $\cos \nu$, wo gleichzeitig rechterhand p durch q und r zu ersetzen ist. Die beiden letzten Gleichungen in 14) treten übrigens an Stelle der einen Gleichung für $x_{\alpha\alpha}$.

Die Grössen

$$\frac{\cos \lambda \cos \alpha - \cos \lambda'}{\sin \alpha}, \quad \frac{\cos \mu \cos \alpha - \cos \mu'}{\sin \alpha}, \quad \frac{\cos \nu \cos \alpha - \cos \nu'}{\sin \alpha}$$

und die aus ihnen durch Vertauschung der gestrichenen und hervorgehenden, welche rechterhand kommen, haben eine sehr einfache Bedeutung. Sie sind nämlich die Richtungskrümmungsradien der Curven α dieselben durch

$$\begin{array}{ccc} \cos l, & \cos m, & \cos n \\ \cos l', & \cos m', & \cos n' \end{array}$$

so erhält man an Stelle von 14)

$$15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \cos \lambda}{\partial s} = -\gamma \cos l + p R \\ \frac{\partial \cos \lambda'}{\partial s'} = -\gamma_1 \cos l' + p R' \\ \frac{\partial \cos \lambda}{\partial s'} = q_1 \cos l \sin \alpha + p S \\ \frac{\partial \cos \lambda'}{\partial s} = q \cos l' \sin \alpha + p S. \end{cases}$$

Die Gleichung für das Krümmungsmaass wird nun

$$16) \quad R R' - S^2 = K \sin^2 \alpha$$

der Seitenkrümmung vorstellen. Hieraus folgt

$$\frac{1}{\sigma'^2} = S^2 + e_1^2$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = S^2 + e^2$$

und zugleich

$$\sigma' \left(p \frac{\partial \cos \lambda}{\partial s'} + q \frac{\partial \cos \mu}{\partial s'} + r \frac{\partial \cos \nu}{\partial s'} \right) = \cos (N, \sigma')$$

$$\sigma \left(p \frac{\partial \cos \lambda'}{\partial s} + q \frac{\partial \cos \mu'}{\partial s} + r \frac{\partial \cos \nu'}{\partial s} \right) = \cos (N, \sigma)$$

oder nach 15)

$$\sigma' S = \cos (\sigma', N)$$

$$\sigma S = \cos (\sigma, N)$$

Aus diesen letzteren Gleichungen folgt der Satz von Aoust,

1) Es ist also auch

$$\frac{1}{\sigma'^2} - \frac{1}{\sigma^2} = e_1^2 - e^2$$

bei der Isometrie invariant.

eingeführten Krümmungsradien und ihre Richtungen kann man für die linke Seite auch setzen

$$\frac{1}{rr_1} \cos(rr_1) - \frac{1}{\sigma\sigma'} \cos(\sigma\sigma').$$

An Stelle der Gleichungen 5) Nr. 5. treten endlich die folgenden

man fast immer die Differentiationen nach den Bogenelementen ds, ds' durch solche nach du, dv wird ersetzen müssen, so geben sie doch, wie aus den vorigen Betrachtungen ersichtlich sein wird, zu mehrfachen neuen Anschauungen und Fragen Veranlassung, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen hoffe.

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_0^t \varphi \, dt \\ G &= \int_0^t \chi \, dt \\ H &= \int_0^t \psi \, dt \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

Die Drehung, welche das im Punkt $x \, y \, z$ befindliche Volumelement $d\tau$ während der Zeit dt um die x -Axe erfährt, wäre dann gleich:

$$\frac{dt}{2} \left(\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\chi}{dz} \right)$$

und a wäre die doppelte Summe der Drehungen, welche alle durch den Punkt $x \, y \, z$ von der Zeit Null bis t hindurchgegangenen Volumelemente im Momente des Durchganges um die x -Axe erfuhren. Analoge Bedeutung hätten b und c bezüglich der y - und z -Axe.

Beide Auffassungen führen weder bei der stationären Aetherbewegung (Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction stationärer und angenähert stationärer elektrischer Ströme, Magnetismus), noch bei sehr kleinen Schwingungen (Licht) zu verschiedenen Gleichungen. Andere Phänomene wurden aber bisher kaum quantitativ mit den Gleichungen verglichen.

Bezeichnen wir ferner die Dichte des Aethers mit $\frac{k}{4\pi}$, so ist die kinetische Energie des im Volumelemente $d\tau$ befindlichen Aethers:

$$\frac{k}{8\pi} (\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2) d\tau \quad 4)$$

Wir denken uns, bloss um die Bewegungsgleichungen des Aethers zu erhalten, auf jedes Volumelement $d\tau$ des Aethers beliebige Kräfte mit den Componenten:

F , G und H verschwinden, sodass also alle Oberflächenintegrale verschwinden. Substituirt man ferner für φ , χ , ψ deren Werte aus den Gleichungen 1), so geht die Gleichung 7) über in:

$$\int d\tau \left\{ \begin{aligned} & \frac{dF}{dt} \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{c}{\mu} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{b}{\mu} \right) + k \frac{d^2 F}{dt^2} + 4\pi C \frac{dF}{dt} + 4\pi X \right] \\ & + \frac{dG}{dt} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{a}{\mu} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{c}{\mu} \right) + k \frac{d^2 G}{dt^2} + 4\pi C \frac{dG}{dt} + 4\pi Y \right] \\ & + \frac{dH}{dt} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{b}{\mu} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{a}{\mu} \right) + k \frac{d^2 H}{dt^2} + 4\pi C \frac{dH}{dt} + 4\pi Z \right] \end{aligned} \right\} = 0 \quad 8)$$

Da die Kräfte und Beschleunigungen mit Ausnahme natürlich der von den Bewegungshindernissen herrührenden von den augenblicklich herrschenden Geschwindigkeiten unabhängig sind, so sind in dieser Gleichung $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$ und $\frac{dH}{dt}$ als unabhängig zu betrachten und es müssen deren Coefficienten separat verschwinden. Man kann übrigens die Veränderungen von F , G und H in ächte Variationen verwandeln, dadurch, dass man den Grössen X , Y , Z während eines sehr kurzen Zeitintervalles sehr grosse Werte erteilt. (Vergl. Maxwell on physical lines of force, Scient. Pap. I. p. 475 Gleichung 53. Phil. Mag. (4) vol. 21.)

Setzen wir daher lediglich zur Abkürzung:

$$f = -\frac{k}{4\pi} \frac{dF}{dt}; \quad g = -\frac{k}{4\pi} \frac{dG}{dt}; \quad h = -\frac{k}{4\pi} \frac{dH}{dt} \quad 9)$$

$$p = -C \frac{dF}{dt}; \quad q = -C \frac{dG}{dt}; \quad r = -C \frac{dH}{dt} \quad 10)$$

$$u = p + \frac{df}{dt}; \quad v = q + \frac{dg}{dt}; \quad w = r + \frac{dh}{dt} \quad 11)$$

so erhalten wir:

III.

$$\frac{1}{2} \pi \mu = \frac{1}{2} \pi \mu$$

$$\frac{1}{2} \pi \mu = \frac{1}{2} \pi \mu$$

$$\frac{1}{2} \pi \mu = \frac{1}{2} \pi \mu$$

s genau mit der Gleichung (1) übereinstimmt. Diese Gleichung ist also auch für die elektrischen und magnetischen Induktionselemente in den Körpern fast. Vergl. auch die Gleichung (2) in der Maxwell's Theorie I. u. z. Barth. 1891 pag. 100.

Direct könnten diese Gleichungen auch aus der Theorie der Induktionselemente gewonnen werden. Das Induktionselement sei ein Parallelepiped, dessen eine Ecke die Coordinaten η, ζ hat, während die anderen um ξ resp. η, ζ grösser sind. Daher wirkt darauf um die y -Axe das Drehmoment:

$$m = \frac{b \xi \eta \zeta}{2 \pi \mu}$$

Das Volumelement ist aber mit den umgebenden so verbunden, dass es sich nicht davon loslösen, und ohne diese nicht drehen, diese Drehung ausführen kann. Es werden daher von den umgebenden Aetherteilchen auf die 4 Seitenflächen, welche der y -Axe parallel sind, Tangentialkräfte ausgeübt werden müssen, welche zusammen das gleiche Drehungsmoment liefern. Nehmen wir an, dass im Gegensatz zum Verhalten gewöhnlicher elastischer Körper die Winkeländerungen des Parallelepipeds nur durch die elastischen Kräfte wachrufen, also die Deviationen der Tangentialkräfte der Elasticitätslehre entsprechen. Dann vertheilt sich das Drehmoment unter beide Flächenpaare gleichmäßig. Auf die eine Fläche \mathcal{Q} von Inhalt $\xi \eta$ wirkt

zur z -Axe senkrecht steht, wirkt daher die Kraft $\frac{m}{2\zeta}$ in der positiven, auf die Gegenfläche Φ' die gleiche Kraft in der negativen x -Richtung. Diese Kräfte werden an den Trennungsflächen je zweier Volumelemente wirken und natürlich an Intensität sich continuirlich von Punkt zu Punkt im Raum ändern. Da aber Φ' und Φ sich dadurch unterscheidet, dass z um ζ grösser ist, so wirkt mit Beachtung des Kleinen 2. Ordnung auf letztere Fläche die Kraft:

$$\frac{1}{2\zeta} \left(m + \frac{d m}{d z} \zeta \right)$$

Beide Kräfte zusammen liefern daher:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d m}{d z} = \frac{\xi \eta \zeta}{4 \pi} \cdot \frac{d \left(\frac{b}{\mu} \right)}{d z}$$

in der x -Richtung. Ganz analog ist die Resultirende:

$$- \frac{\xi \eta \zeta}{4 \pi} \frac{d \left(\frac{c}{\mu} \right)}{d y}$$

Zieht man von diesen Molekularkräften den Reibungswiderstand $C \frac{d F}{d t}$ ab, setzt die so erhaltene Gesamtkraft gleich

der mit der Masse $\frac{k \xi \eta \zeta}{4 \pi}$ multiplicirten Beschleunigung in

der x -Richtung, und multiplicirt schliesslich mit $\frac{4 \pi}{\xi \eta \zeta}$, so folgt sofort die obige Gleichung:

$$k \frac{d^2 F}{d t^2} + 4 \pi C \frac{d F}{d t} = \frac{d \left(\frac{b}{\mu} \right)}{d z} - \frac{d \left(\frac{c}{\mu} \right)}{d y}.$$

Die Grundgleichungen des Elektromagnetismus für bewegte Körper findet man hieraus, indem man unter $x \ y \ z$

Der Druck an irgend einer Stelle ist dann:

$$p = p_0 - \frac{k}{8\pi} \left[\left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \right]$$

Die gesammte Kraft X , welche auf einen im Aether befindlichen Körper in der Richtung der x -Axe wirkt, ist:

$$X = \int p \, ds \cos(n, x) = \iiint p \, dy \, dz = \int \frac{dp}{dx} d\tau$$

wobei $d\tau$ ein Volumelement, ds ein Oberflächenelement des Körpers, n die zu letzterem gezogene Normale ist. Die Substitution des Wertes für p liefert:

$$X = - \int d\tau \frac{k}{4\pi} \left[\frac{dW}{dx} \cdot \frac{d^2W}{dx^2} + \frac{dW}{dy} \cdot \frac{d^2W}{dx \, dy} + \frac{dW}{dz} \cdot \frac{d^2W}{dx \, dz} \right]$$

und die partielle Integration liefert:

$$X = \int k \frac{d\tau}{4\pi} \frac{dW}{dx} \Delta W$$

Setzt man $\Delta W = -4\pi\epsilon$ und betrachtet bloss die Coordinaten $\xi \eta \zeta$ der elektrischen Masse $\epsilon d\tau$ als variabel, so erhält man:

$$X = -k \frac{d}{d\xi} \int \epsilon W \, d\tau$$

(Vergl. Maxwell scient. pap. vol. I pag. 497.)

Wir wollen hier aber nur ein ganz specielles Beispiel in einer ganz directen Weise behandeln. In dem oben beschriebenen Medium sollen sich zwei gleichnamig geladene Körper befinden. Der erste derselben soll nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkte A und dem Radius ϱ , der zweite nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkt B und dem Radius ϱ' abweichen. Wir wählen A zum Coordinatenanfangspunkt und ziehen die negative Abscissenaxe gegen B hin. Die Länge $AB = \gamma$ soll sehr gross sein gegenüber den beiden Radien ϱ und ϱ' . Setzen wir wieder:

dem ersten Körper entströmt, womit dieser also geladen war, hat nach dem Ausströmen das Volumen:

$$\Omega = 4\pi \cdot \int_0^{\infty} M' dt = k \frac{\alpha}{C} \quad 15)$$

da $\frac{k}{4\pi}$ die Dichte des Aethers nach dem Ausströmen ist.

(Die Körper selbst können aus beliebiger ponderabler Masse bestehen, worin wir uns den Aether durch irgend welche Kräfte (chemische) beliebig verdichtet denken.)

Die Masse des Aethers, womit der erste Körper geladen war, ist also:

$$m = \frac{k^2 \alpha}{4\pi C} \quad 16)$$

Dieselbe Grösse hat für den zweiten Körper den Wert:

$$\frac{k^2 \beta}{4\pi C}$$

Wir wollen nun die gesammte Kraft X suchen, welche auf den ersten Körper infolge des Aetherdruckes ausgeübt wird. Derselbe sendet beständig durch innere Kräfte Aether normal zu seiner Oberfläche aus. Wäre er absolut kugelförmig, so müsste die durch obige Formeln angegebene Aetherbewegung ein wenig modificiert werden, damit die Aetherausstrahlung überall normal zur Körperoberfläche geschieht. Es vereinfacht die Rechnung, wenn man umgekehrt die Gestalt des Körpers so von der Kugelform abweichen lässt, dass dessen Oberfläche überall senkrecht auf der durch die obigen Gleichungen definierten Aetherströmung steht; d. h. der Gleichung:

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{s} = c$$

genügt, wobei c eine Constante ist.

Seien x y z die Coordinaten eines Punktes der Körperoberfläche und setzen wir:

$$X = \frac{3 k \alpha \beta}{2 \gamma^2} \cdot \int \frac{x \eta d \eta}{r^3}$$

Hier kann der Körper wieder als Kugel betrachtet und

$$x = r \cos \vartheta$$

$$\eta = r \sin \vartheta$$

gesetzt werden, wodurch man, da r constant ist, erhält:

$$X = \frac{3 k \alpha \beta}{2 \gamma^2} \cdot \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d \vartheta = \frac{k \alpha \beta}{\gamma^2}$$

Es soll nun das Dielectricum so schlecht leiten, dass die Ladung in T Tagen von 1 auf $\frac{1}{e}$ sinkt ($e = 2,718 \dots$).

Dann ist:

$$\frac{4 \pi C}{k} = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60 T \text{ sec}}, \quad C = \frac{k}{10^6 T \text{ sec}}.$$

Ferner soll jede der geladenen Kugeln R cm Radius haben und zu Anfang mit 30000 V Volt geladen worden sein. Ein Volt ist in elektromagnetischem Maasse das Potential:

$$\frac{10^9 \sqrt{\text{gr cm}^3}}{\text{sec}^2};$$

in elektrostatischem Maasse:

$$\frac{\sqrt{\text{gr cm}}}{300 \text{ sec}}.$$

Da das Potential einer Kugel gleich der Elektrizitätsmenge dividiert durch den Kugelradius ist, so ist die auf jeder der Kugeln vorhandene Elektrizitätsmenge in statischem Maasse gemessen:

$$\epsilon = \frac{100 R \sqrt{\text{gr cm}^3}}{\text{sec}} V.$$

Maxwell's fraglich wird. Wenn daher diese Zahl auch jedenfalls an der Grenze des möglichen liegt, so kann doch meiner Ansicht nach gerade nicht behauptet werden, dass die vorliegende mechanische Analogie in quantitativer Hinsicht heute auf einen völligen Widerspruch stosse.

Behufs weiterer Versinnlichung unserer mechanischen Analogie betrachten wir dasselbe Dielectricum (Luft) wie im vorigen. Es sollen jedoch darinnen sich verschiedene Körper befinden, in welchen k und C andere Werte haben. In der Luft und in allen Körpern, worin C klein von derselben Grössenordnung ist, werden φ , χ , ψ sehr lange endlich bleiben, dagegen werden, weil alles fast stationär wird, deren Differentialquotienten nach der Zeit, sowie p , q , r und u , v , w bald sehr klein werden. Daher wird gemäss der Gleichung 12):

$$\frac{a}{\mu} dx + \frac{b}{\mu} dy + \frac{c}{\mu} dz$$

ein vollständiges Differential dW , d. h. die magnetischen Kräfte haben ein Potential. Aus Gleichung 2) folgt ferner:

$$\frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dW}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{dW}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\mu \frac{dW}{dz} \right) = 0.$$

Da W und μ überall stetig und die erstere Grösse im Unendlichen gleich Null ist, so folgt hieraus:

$$W = a = b = c = 0.$$

Obige Gleichung ist nämlich die Bedingung dafür, dass:

$$\iiint \mu dx dy dz \left[\left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \right]$$

ein Minimum ist, was nur für $W = 0$ zutrifft.

Man sieht daher durch diese Darstellung den Grund ein, weshalb die Magnetisierung so geschieht, dass die magnetische Energie, d. h. die Summe der mit μ multiplicierten

Hat in einem Körper C einen gewissen Wert, so nimmt dieselbe (cf. Gleichung 149) V mehrer ab (die elektrische Nachwirkung, elektrische Absorption). Hat C einen sehr grossen Wert, d. h. ist der Körper ein Leiter, so muss V bald constant werden. Die Aetherbewegung verhält sich dem betreffenden Körper wie Wasser einem eingetauchten festen Körper. Die dadurch entstehende Modifikation des Wertes von V nennt man die Modifikation des eingetauchten Körpers durch Leitern. Man kann diese Modifikation auch dadurch entstanden denken, dass sich zur Aetherbewegung, welche ohne Anwesenheit des Leiters stattfinden würde, noch ein Ausströmen von Aether von der positiv induzierten Seite des Körpers, ein Einstömen von der negativen superponiert, von der Beschaffenheit, dass dadurch die Aetherbewegung überall tangential zur Oberfläche des Körpers gemacht wird. Im Körper selbst ist nur ein ganz schwacher Strom, welcher die langsame Absorption der elektrischen Leitern bewirkt, die durch die allseitliche Zerstreuung der Elektrizität an den ursprünglich geladenen Körpern bedingt ist. Dies wäre in allgemeinen Zügen das Bild der sogenannten Elektrostatik.

Um uns ein Bild von der Aetherbewegung beim stationären elektrischen Strom zu verschaffen, wollen wir einen unendlich langen geraden Kreiszylinder vom Radius ρ betrachten, dessen Axe die Abscissenaxe ist und der in Richtung der positiven Abscissen vom positiven elektrischen Strom durchflossen wird. Das elektrostatische Potential, welches nötig ist, um einen solchen Strom zu treiben, wird in unendlicher Entfernung von der Abscissenaxe unendlich. In der alten Fernwirkungstheorie scheint dies wenig, da man die elektrostatischen und elektrodynamischen Erscheinungen denselben völlig getrennt betrachtet. Es muss eher als ein Vorzug der neuen Theorie betrachtet werden, dass dabei eine solche Trennung überhaupt nicht zutrifft.

sein, wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Da ferner a, b, c nicht ins Unendliche wachsen dürfen, weil dadurch unendliche Kräfte geweckt würden, so muss im Dielektricum der t enthaltende Teil von:

$$F dx + G dy + H dz$$

ein vollständiges Differential sein, woraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} G &= - \frac{A t x y}{r^2 l_R^e} \\ H &= - \frac{A t x z}{r^2 l_R^e} \end{aligned} \right\}$$

Die Grösse:

$$\frac{g y + h z}{r = \varrho} = - \frac{k}{4 \pi \varrho} \left(y \frac{dG}{dt} + z \frac{dH}{dt} \right) = \frac{k A x}{4 \pi \varrho l_R^e}$$

ist das, was man die Flächendichte der freien Elektrizität auf der Oberfläche des massiven Cylinders,

$$\int \left(\frac{dF}{dt} dx + \frac{dG}{dt} dy + \frac{dH}{dt} dz \right) = - \frac{A x}{l_R^e} l_R^r$$

das, was man deren Potentialfunction nennt.

Für elektrostatisches Maass ist im Standardmedium $k=1$. Von R würde man unabhängig, wenn zwei gleichbeschaffene, in entgegengesetzter Richtung durchströmte Cylinder, für deren Axen $y=0$, $z=p$ und $z=-p$ ist, vorhanden wären, welche für $x=0$ das elektrostatische Potential Null haben. Sind dann:

$$r = \sqrt{y^2 + (z-p)^2} \text{ und } s = \sqrt{y^2 + (z+p)^2}$$

die Entfernungen eines Punktes von der ersten resp. zweiten Axe, und ist der Radius ϱ beider Cylinder klein gegen p , so ist im ersten Cylinder:

$$\begin{aligned} F &= - A t - \pi \mu A C r^2; \quad G = H = 0; \\ a &= 0; \quad b = - 2 \pi \mu A C (z-p); \quad c = 2 \pi \mu A C y; \end{aligned}$$

im zweiten Cylinder:

$$F = A t + \pi \mu A C s^2; \quad G = H = 0;$$

$$a = 0; \quad b = -2 \pi \mu A C (z + p); \quad c = 2 \pi \mu A C y$$

und im umgebenden Dielektricum:

$$F = \left(-\frac{t}{l_{\varrho}^2 p} + 2 \pi \mu' C \varrho^2 \right) A l_r^2 - \pi A C \varrho^2 (2 \mu' l_{\varrho}^2 p + u);$$

$$G = \frac{A t x y}{l_{\varrho}^2 p} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right); \quad H = \frac{A t x}{l_{\varrho}^2 p} \left(\frac{z - p}{r^2} - \frac{z + p}{s^2} \right);$$

$$a = 0; \quad b = -2 \pi \mu' C \varrho^2 \left(\frac{z - p}{r^2} - \frac{z + p}{s^2} \right);$$

$$c = 2 \pi \mu' C \varrho^2 y \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2} \right).$$

fläche aufgelöst wurde. Um ganz einwurfsfreie Resultate zu erhalten, wurden sehr vollkommene, polirte Kugeln aus ganz homogenem Steinsalz von Herrn Steeg und Reuter angefertigt, und zwar solche von 6, 12 und 18 mm Durchmesser. in eine nicht ganz gesättigte Chlornatriumlösung eingehängt und 15 Minuten darin gelassen, während die Lösung, um Sättigungsdifferenzen und den Einfluss der Diffusion möglichst zu beseitigen, ununterbrochen umgerührt wurde. Es ergaben sich folgende Werthe:

Anfangs- Gewicht	End- Gewicht	Mittel- Gewicht	Ist aus dem Gewicht be- rechneten Oberflächen	Verlust	M. g. gelöst per qcm	Be- rechnete Werthe
6.6519	6.5578	6.50455	10.028	0.2941	29.33	29.44
1.9841	1.8187	1.8829	4.397	0.1504	34.21	32.93
0.2487	0.2011	0.2249	1.064	0.0436	41.32	42.51

Wenn die pro Oberfläche-Einheit gelöste Menge eine Function der Grösse oder der Krümmung der Kugel ist, so muss die pro qcm gelöste Menge eine Function zum Radius sein. In der That verhalten sich die in der Tabelle angegebenen Zahlen sehr nahe umgekehrt, wie in der folgenden Tabelle fest zum Ausdruck kommt. Das Gesetz zu Grunde liegend, ist das von der Kugel ausgehend. In der folgenden Tabelle erhält man drei Reihen von Zahlen, die die unter „Berechnete Werthe“ angegebenen Zahlen angegebener Zahlen an-

nehmen, wenn man die Oberfläche der Kugel in stärkeren Lösung
nimmt, so nimmt die gelöste Menge

Radius	1.000	1.000
„	1.000	1.000
„	1.000	1.000
„	1.000	1.000

Sitzung vom 2. Juli 1892.

1. Herr C. v. KUPFFER macht Mittheilungen aus einer mit Unterstützung der Akademie ausgeführten umfassenden Untersuchung „über die Entwicklung des Störs“.

2. Herr AD. v. BAEYER bespricht im Anschluss an die in der Sitzung vom 11. Juni gemachte Mittheilung seine weiteren Versuche „über die Synthese des Dihydro-paraxylols“.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 24. Jahrg. 1891. Nr. 19, 20. 25. Jahrg. 1892. Nr. 1—11. 8°.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 43. Heft 3, 4. Bd. 44. Heft 1. 1891/92. 8°.

Medizinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. XXII. Band. 1892. 8°.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1885. Jahrg. 41. Abth. 1—3.
1891. 8°.

Verhandlungen. 10. Jahrg. 1892. 8°.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie 1891. Bd. V. Nr. 18—26. 1892. Nr. 1—6.
1891/92. 8°.

Verhandlungen. 1890—1891. Nr. 17. 8°.

Kgl. Preuss. Meteorologisches Institut in Berlin:

Abhandlungen. Bd. I. Nr. 4, 5. 1892. 4°.

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen im Jahre 1891. 1892. 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXI. Jahrg. 1889, Heft 1, 2. 1892. 8°.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. 1892. Nr. 2—26. 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. XII. Jahrg. 1892. Heft 1—6. gr. 8°.

Society of natural Sciences in Buffalo:

Bulletin. Vol. V. Nr. 3. 1891. 8^o.

Institut météorologique de Roumanie in Bukarest:

Annales. Tom. V. 1889. 1892. 4^o.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:

Almanaque náutico para 1893. Madrid 1891. 8^o.

Société Linnéenne in Caen:

Bulletin. Vol. 5. fasc. 3. 4. 1891. 1892. 8^o.

Bulletin mensuel de la commission météorologique du Calvados. 1891
Juillet—Déc. 8^o.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Report on the Administration in 1889—90. 1891. Fol.

Report on the Meteorology of India. XV. year. 1891. Fol.

Monthly Weather Review. May—July 1891. Fol.

Meteorological Observations. Mai—July 1891. Fol.

Indian Museum in Calcutta:

W. L. Sclater, List of Snakes in the Indian Museum. 1891. 8^o.

The Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXIV. part 4. XXV. part 1. 1891/92, 4^o.

Memoirs. Vol. XXIII. 1891. 4^o.

Palaeontologia Indica. Ser. XIII. Vol. IV. part 2. 1891. Fol.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VII. part 5. 1892. 8^o.

Transactions. Vol. XV. part 2. 1891. 4^o.

Museum of comparative zoölogy at Harward College in Cambridge, Mass.

Annual Report for 1890—91. 8^o.

Bulletin. Vol. XXII. Nr. 1—4. XXIII. Nr. 1, 2. 1891/92. 8^o.

Memoirs. Vol. XVII. Nr. 2. 1892. 4^o.

Astronomical Observatory at Harward College in Cambridge, Mass:

Annals. Vol. XXVI. part 1. 1891. 4^o.

46th annual Report for the year ending October 31, 1891. 8^o.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bullettino mensile. Fasc. 23—25. 1892. 8^o.

Atti. Serie IV. Vol. 3. 1891. 4^o.

Sprachstudien Langjagard. Tom. 25. 26. 1892. 8°.

Zeitschr. antropolog. Tom. 14. 15. 1891/92. 8°.

Botan. Distributio plantarum in montibus Thibeticis. 1890—92. 8°.

Atlas géologique IV. 1891. Fol.

Société Française des Sciences naturelles in Louvain:

Bulletin. 8^e Serie. Vol. XXVII. Nr. 105, 106. 1892. 8°.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Teil XI. Heft 1. 1892. 8°.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. 26. Jahrg. Heft 4. 27. Jahrg. Heft 1. 1891/92. 8°.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

*Berichte der mathem.-physikalischen Classe 1891. Heft III, IV, V.
1892. Nr. 1. 1891/92. 8°.*

*Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe. Bd. XVIII.
Nr. 2—6. 1892. 4°.*

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 45. Heft 1—11. 1892. 8°.

University of Nebraska in Lincoln:

*5th annual Report of the Agricultural Experiment Station. 1891. 8°.
Bulletin of the Agricultural Experiment Station. Vol. V. Nr. 21.
1892. 8°.*

Zeitschrift „La Cellule“ in Löwen:

La Cellule. Tom. VII. Fasc. 2. 1891. 4°.

Her Majesty's Government in London:

*Report of the scientific Results of the Voyage of H. M. S. Challenger.
Deep Sea Deposits. 1891. 4°.*

Royal Institution of Great Britain in London:

*Proceedings. Vol. XIII. part 2. 1892. 8°.
List of the Members 1891. 8°.*

Royal Society in London:

*Proceedings. Vol. 50. Nr. 303—306. Vol. 51. 308. 309. 1891/92. 8°.
Catalogue of scientific Papers (1874—1883). Vol. IX. 1891. 4°.*

Royal Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 52. Nr. 2—7. 1891/92. 8°.

... of
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

Sociedad Mexicana de historia natural in Mexico
La Naturaleza. II. Serie. Tomo 2. Nr. 1. 1891. Fol.

Deutscher wissenschaftlicher Verein in Mexico
Mittheilungen. Bd. I. Heft 4. 1892. Fol.

Minnesota Academy of natural sciences in Minna
Bulletin. Vol. III. Nr. 2. 1891. 8^o.

Società dei Naturalisti in Modena:
Atti. Ser. III. Vol. X. Fasc. 2. 1892. 8^o.

Zoological Survey of Canada in Montreal:
Annual Report. (New Series). Vol. IV. 1888—89. 1890.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau.
Bulletin. Année 1891. Nr. 2—4. 1892. Nr. 1. 8^o.

Lick Observatory in Mount Hamilton, Cal.:
Reports on the Observations of the total eclipse of the
 21—22, 1889. Sacramento 1891. 8^o.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und
Correspondenzblatt. 1891. Nr. 10—12. 1892. Nr. 1—4. 4

K. Staatsministerium des Innern in München
C. W. v. Gümbel, geognostische Beschreibung der fränk.
Kassel 1891. 4^o.

K. Staatsminisierium des Innern für Kirchen- und Schu-
heiten in München:
Veröffentlichung der K. Württembergischen Commission f
ationale Erdmessung. Heft III. 1892. 4^o.
Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserverhältnisse in
Rheingebiet. Heft I, II. Berlin 1891. Fol.

Aerztlicher Verein in München:
Sitzungsberichte. I. 1891. 1892. 8^o.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in N
Rendiconto. Ser. II. Vol. V. Fasc. 1—12. Vol. VI. Fasc. 1—5.

Zoologische Station in Neapel:
Mittheilungen. Bd. X. Heft 2. 1891. 8^o.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1892. Nr. 1—25. 8°.

Académie des Sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 114. Nr. 1—25. 1892. 4°.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 601—606. Janvier—Juni 1892. 4°.

Société de géographie à Paris:

Comptes rendus. 1891. Nr. 19. 20. 1892. Nr. 1—11. 8°.

Bulletin. IV. Sér. Tom. XII. 3° et 4° trimestre 1891. 1891/92. 8°.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XIX. Nr. 7. 8. XX. Nr. 1. 2. 1891/92. 8°.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XVI. Nr. 9, 10. XVII. Nr. 1—5. 1891/92. 8°.

Mémoires. Tom. IV. part. 5. Tom. V. part. 1—3. 1891/92. 8°.

Zeitschrift L'Électricien in Paris:

L'Électricien. II. Sér. Tom. III. Nr. 53. 55—78. 1892. gr. 8°.

Académie Impériale des Sciences in St. Petersburg:

Mémoires. VII. Série. Tom. XXXVIII. Nr. 4—8. Tom. XXXIX. 1891. 4°.

Bulletin. Nouv. Série. Tom. 2. Nr. 3. 4. 1892. 4°.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XI. Fasc. 2, 1892. 8°.

Chemisch.-physikal. Gesellschaft an der Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXIII. Heft 9. XXIV. 1—4. 1891/92. 8°.

Institut Impérial de médecine expérimentale in St. Petersburg:

Archives. Tom. I. Nr. 1, 2. 1892. 4°.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Repertorium für Meteorologie. Bd. XIV. 1891. 4°.

Annalen. Jahrg. 1890. Theil. II. 1891. 4°.

Société des Naturalistes in St. Petersburg:

Trudy. Vol. XXI. Livr. 2. Vol. XXII. 1890/91. 8°.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht über die Thätigkeit 1889/90. 1891. 8°.

California Academy of Sciences in San Francisco:

Proceedings. II. Series. Vol. III, part 1. 1891. 8°.

R. Accademia dei Fisiocritici in Siena:

Atti. Ser. IV. Vol. III. Fasc. 10. e supplemento. 1891/92. gr. 8°.

Nordisches Museum in Stockholm:

Führer durch die Sammlungen des nordischen Museums in Stockholm, herausg. von Arthur Hazelius. 1888. 8°.

Program för en byggnad åt Nordiska Museet i Stockholm. 1883. 8°.

Förslag till byggnad för Nordiska Museet. 1891. Fol.

Le Musée d'éthnographie Scandinave à Stockholm, notice historique par J. H. Kramer. 2. éd. 1879. 8°.

Samfundet för Nordiska Museets främjande 1889. Meddelanden. 1891. 8°.

Das Nordische Museum in Stockholm. Stimmen aus der Fremde. 1888. 8°.

Afbildningar af föremål i Nordiska Museet. Småland. 1888. 4°.

Afbildningar af föremål i Nordiska Museet. Island. 1890. 4°.

Runa. Minnesblad från Noreiska Museet. 1888. Fol.

Samfundet. 1881—1888. 8°.

Minnen från Nordiska Museet. Bd. II. s. a. 4°.

Gabriel Djurklou, Lifvet i Västergötland. 1885. 8°.

Société des Sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. 27. Fasc. 1—6. Janv.—Juin 1892. 8°.

Australasian Association for the advancement of Science in Sydney:

Report. Vol. III. New-Zealand Meeting 1891. 1892. 8°.

Department of Mines in Sydney:

Records of the Geological Survey of New-South-Wales. Vol. I. part 1—4. 1889—92. 4°.

Memoirs. Palaeontology. Nr. 8. 1891. 4°.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. XXV. 1891. 8°.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya, Mexico:

Boletín. Tom. I. Nr. 7—9. 1891/92. 4°.

K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Denkschriften. Mathematisch-naturwissensch. Klasse. 1891/92. 4^o.
Sitzungsberichte. Mathematisch-naturwissensch. Klasse.

Abtheilung I 1891. Nr. 1—7

„ II^a „ Nr. 1—7

„ II^b „ Nr. 1—7

„ III „ Nr. 1—7. 1891—91. 8^o.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1891. Nr. 15—18. 1892. Nr. 1—5. 4^o.
Jahrbuch. Bd. 41. Heft 2. 3. 1892. 4^o.

K. K. Oesterreichische Gradmessungs-Commission in Wien:

Astronomische Arbeiten. 1891. 4^o.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1892. Nr. 1—22. 4^o.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXI. Heft 4—6. Bd. XXII. Heft 1. 2. 1891/92. 4^o.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXXIV. 1891. 8^o.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. 41. Bd. Quartal 3 und 4. 1891. 8^o.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. VI. Nr. 3, 4. VII. 1, 2. 1891/92. 4^o.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:
Schriften. Bd. 31. 1890/91. 1891. 8^o.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. XXV. N. 6, 7. XXVII. 1—3. 1891/92. 8^o.
Sitzungsberichte. 1891. Nr. 4—9. 1892. 1—3. 1891/92. 8^o.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen. 26. Jahrg. 1892. 4^o.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrschrift. Jahrg. 36. Heft 2—4. 1891. 8^o.

Von folgenden Privatpersonen:

Lucien Anspach in Brüssel:

Le rôle de l'eau dans les cylindres à vapeur. 2891. 8°.

Julius Bergbohm in Wien:

Neue Integrationsmethoden. Stuttgart 1892. 8°.

O. Chwolson in St. Petersburg:

Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie. 1892. 4°.

Darget in Pauilhac (Gers):

Theories géométriques diverses. Auch 1892. 4°.

Karl Gegenbauer in Heidelberg:

Die Epiglottis. Vergleichend-anatomische Studie. Leipzig 1892. 4°.

Friedrich Goppelsröder in Mühlhausen i. E.:

Studien über die Anwendung der Elektrolyse. 1891. Fol.

Irving Hale in Denver, Colorado:

The present limitations of electric power in Mining. 1892. 8°.

Josef Bernh. Jack in Konstanz:

Botanische Wanderungen am Bodensee und im Hegau. Freiburg
1892. 8°.

Hepaticae Wallisianae. 1892. 8°.

A. Kirchhoff in Berlin:

Bericht der Central-Commission für wissenschaftliche Landeskunde
1889—1891. 1891. 8°.

A. v. Kölliker in Würzburg:

Ueber den feineren Bau des Bulbus olfactorius. 1892. 8°.

A. Kurz in Augsburg:

Zur Bildungs- und Gymnasialfrage. 1892. 8°.

Ueber Luft-Elektrizität. 1892. 8°.

Ferdinand v. Müller in Melbourne:

Iconography of Australian salsolaceous plants. VIIIth Decade. 1891. 4°.

G. Omboni in Padua:

Frutto fossile di pino. Venezia 1892. 8°.

L. Rütimeyer in Basel:

Die eocäne Säugethier-Welt von Egerkingen. Zürich 1891. 4^o.

Paul Schreiber in Chemnitz:

Untersuchung über die Periodicität des Niederschlages im Königreich Sachsen. (Ausschnitt.) 1891. 4^o.

Adolf Steinheil in München:

Handbuch der angewandten Optik. I. Band. Leipzig 1891. 8^o.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen Nr. 79. 1892. 8^o.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. November 1892.

1. Herr L. BOLTZMANN überreicht und bespricht eine Abhandlung: „III. Theil der Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft.“

2. Herr E. LOMMEL legt das von ihm herausgegebene Werk: „G. L. OHM's gesammelte Abhandlungen“ der Classe vor.

3. Herr L. SOHNCKE macht Mittheilungen über wissenschaftliche Luftfahrten des Münchener Vereins für Luftschiffahrt. Im Anschlusse an diese Mittheilung des Herrn SOHNCKE und auf Anregung desselben giebt die Classe folgende Erklärung ab:

„Die Ausführung wissenschaftlicher Luftfahrten, wie sie vom Münchener Verein für Luftschiffahrt in grösserem Maasse als bisher geplant werden, ist von Wichtigkeit für die Ergründung der physikalischen Verhältnisse der Atmosphäre. Besonders verspricht die Wiederholung solcher von München aus zu unternehmenden Fahrten, mit Rücksicht auf die Nachbarschaft meteorologischer Hochstationen, eine wesentliche Förderung der Wissenschaft.“

4. Herr L. RADLKOFER theilt Einiges über den Verlauf und die Ergebnisse des im Herbste dieses Jahres in Genua stattgefundenen internationalen botanischen Congresses mit.

5. Herr M. v. PETTENKOFER zeigt an, dass die Liebig-Fleischextract-Compagnie in Fray-Bentos in den Pampas ausgegrabene wohlerhaltene Knochen eines grossen diluvialen Säugethieres, nach den Photographien wahrscheinlich eines Mastodons, der Akademie zum Geschenk gemacht habe.

III. Teil der Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 5. November.)

I think, that a problem of such primary importance in molecular science ought to be scrutinized and examined on every side, so that as many persons as possible may be enabled to follow the demonstration.

Maxwell, scient. pap. II pag. 713.

§ 1. Ueber die Variabeln, welche den Ausdruck für die lebendige Kraft auf eine Summe von Quadraten reducieren.

Maxwell hat zuerst¹⁾ die Formel für die Verteilung der lebendigen Kraft unter einatomigen Gasmolekülen aufgestellt, welche er als vollkommen harte Kugeln von gleicher oder verschiedener Beschaffenheit (Masse und Radius) voraussetzte. Er behandelte daselbst auch den Fall, dass die Moleküle harte Körper mit drei verschiedenen Hauptträgheitsmomenten sind, und fand, dass für ein solches Gas das Verhältnis der spezifischen Wärmen $1\frac{1}{3}$ sein müsste. Da dasselbe jedoch für die bekanntesten einfachen Gase den Wert 1,4 hat, so schloss er, dass in diesem Punkte die mechanische Analogie mit der Erfahrung im Widerspruch steht.²⁾

1) Illustrations of the Dynamical Theory of Gases. Phil. mag. jan. and june 1860. scient. pap. I pag. 377.

2) Maxwell, scient. pap. pag. 409.

Die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsachsen bei allseitiger Drehung eines festen Körpers sind ein Beispiel hiefür.

$\frac{1}{2} \mu_1 \alpha_1^2$ will ich als den auf das Momentoid α_1 entfallenden Teil der gesamten lebendigen Kraft bezeichnen. Wegen $\Theta = 1$ erhalten wir zunächst $da_1 da_2 \cdots da_n = d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_n$. Führen wir links statt a_1 , rechts statt α_1 die Variable T ein, so folgt

$$\frac{\frac{1}{d T} d T da_2 da_3 \cdots da_n}{da_1} = \frac{\frac{1}{d T} d T d\alpha_2 d\alpha_3 \cdots d\alpha_n}{d\alpha_1}$$

dividieren wir durch $d T$ weg und berücksichtigen, dass

$$\frac{d T}{da_1} = b_1, \quad \frac{d T}{d\alpha_1} = \mu_1 \alpha_1,$$

so folgt

$$\frac{1}{b_1} da_2 da_3 \cdots da_n = \frac{1}{\mu_1 \alpha_1} d\alpha_2 d\alpha_3 \cdots d\alpha_n$$

Aus Maxwells Gleichung 28 (l. c. pag. 721) folgt für die Anzahl der Systeme, für welche die generalisierten Coordinaten zwischen den Grenzen b_1 und $b_1 + db_1 \cdots b_n$ und $b_n + db_n$, die Momentoide aber zwischen den Grenzen α_1 und $\alpha_1 + d\alpha_1 \cdots \alpha_n$ und $\alpha_n + d\alpha_n$ liegen, während α_1 durch die Gleichung der lebendigen Kraft bestimmt ist, der Wert

$$\frac{NC}{\mu_1 \alpha_1} db_1 \cdots db_n d\alpha_2 \cdots d\alpha_n$$

Führt man nun die Integrationen genau so aus, wie es Maxwell thut, so gelangt man zu dessen Gleichung 45, welche somit vollständig richtig ist.

Bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, dass die auf das Momentoid α_n entfallende lebendige Kraft $\frac{\mu_n \alpha_n^2}{2}$ zwischen

Ueber die von Lord Kelvin als Stichproben (test-cases) vorgeschlagenen speziellen Fälle.

§ 2. Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene.

Ich glaube, dass unter diesen Modifikationen der Beweis Maxwells für die im vorigen Paragraphen erwähnten Lehrsätze ein befriedigender ist; ausserdem habe ich schon früher¹⁾ einen auf ganz anderer Basis beruhenden Beweis dieses Satzes geliefert. Ich glaube daher, dass seine Richtigkeit als Lehrsatz der analytischen Mechanik kaum angezweifelt werden kann.²⁾ Da ich selbst nur mühsam durch Betrachtung vieler speziellen Fälle³⁾ zu meinem Satz gelangte, so weiss ich der Wert einer steten Erläuterung allgemeiner Sätze durch spezielle Beispiele zu schätzen und will mich daher noch mit einigen der von Lord Kelvin a. a. O. als Stichproben vorgeschlagenen speziellen Beispielen beschäftigen und zwar zunächst mit dem letzten, weil es das einfachste ist, und weil

1) Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gas-
molekülen, 1. Abschnitt: Bewegung der Atome in den Molekülen.
Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. Band 3, 9. März 1871. — Einige all-
gemeine Sätze über Wärmegleichgewicht, ebd. 13. April 1871; in der
letzten Abhandlung habe ich auch schon von generalisierten Coordi-
naten Gebrauch gemacht.

2) Eine hievon völlig getrennte Frage ist die, ob solche Systeme
eine genügend durchgreifende Analogie mit warmen Körpern zeigen.
Diese Frage soll hier nicht erörtert werden; vergleiche jedoch hier-
über Wiedemanns Beiblätter Bd. 5 pag. 403, 1861.

3) Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft. Sitz-
Ber. d. Wien. Akad. Bd. 58, 8. Oktober 1868, — Lösung eines me-
chanischen Problemes, ebd. 17. Dezember 1868. — Einige allgemeine
Sätze über Wärmegleichgewicht, Schluss des 2. Abschnittes, ebd.
Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie.
Wien. Sitz.-Ber. Bd. 75, 11. Jänner 1877. Schluss des 3. Abschnit-
tes etc.

Winkel θ bilde und in den Coordinatenrichtungen die Componenten u, v habe. Der Zustandspunkt befindet sich also zur Zeit t an der Stelle A des Raumes, welche die Coordinaten x, y, θ hat.

Nach Verlauf einer sehr kleinen Zeit δt also zur Zeit $t + \delta t$ soll das Bewegliche die Coordinaten x', y' haben. Seine Geschwindigkeit soll mit der positiven Abscissenachse den Winkel θ' bilden und in den Coordinatenrichtungen die Componenten u', v' haben.

Die Lage des Zustandspunkts zur Zeit $t + \delta t$ soll mit A' bezeichnet werden. A' soll der dem Punkte A entsprechende Punkt heissen. Betrachten wir δt als constant, so wird jedem Punkte innerhalb des Zustandscyinders ein anderer Punkt daselbst entsprechen. Jedesmal, wenn sich zu irgend einer Zeit der Zustandspunkt in irgend einem Raumpunkte befunden hat, wird er sich nach Verlauf der Zeit δt in dem diesem Raumpunkte entsprechenden befinden; und umgekehrt kann er niemals nach dem entsprechenden Punkte kommen, ohne genau vor der Zeit δt in demjenigen Raumpunkte gewesen zu sein, dem der vorhergenannte Raumpunkt entspricht.

Bekanntlich ist:

$$\begin{aligned} x' &= x + q \cos \theta \cdot \delta t, & y' &= y + q \sin \theta \cdot \delta t \\ u' &= u + \xi \cdot \delta t, & v' &= v + \eta \cdot \delta t \end{aligned} \quad 1)$$

wobei $\xi = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $\eta = -\frac{\partial V}{\partial y}$ die Componenten der auf das Bewegliche wirkenden Kraft, also Funktionen von x und y sind. Ferner ist

$$\theta' = \operatorname{arctg} \frac{v'}{u'},$$

was nach Substitution der obigen Werte liefert

$$\theta' = \theta + (\eta \cdot \cos \theta - \xi \sin \theta) \frac{\delta t}{q}. \quad 2)$$

Wir konstruieren nun ein unendlich kleines, rechtwinkliges Parallelepiped $dx dy d\theta$, dessen eine Ecke im Punkte A liegt. Derjenige Bruchteil der gesamten Zeit T , während dessen der Zustandspunkt innerhalb dieses Parallelepipedes liegt, sei dt . Es ist dies die Zeit, während welcher die 3 Variablen x, y, θ zwischen den Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$, θ und $\theta + d\theta$ eingeschlossen sind. Wir können dann jedenfalls setzen:

$$dt = f(x, y, \theta) dx dy d\theta \quad 3)$$

Wir konstruieren nun zu jedem Punkte des Parallelepipedes $dx dy d\theta$ den entsprechenden Punkt, wodurch das Parallelepiped $dx' dy' d\theta'$ erhalten werden soll. Derjenige Bruchteil der Zeit T nun, während dessen der Zustandspunkt innerhalb $dx' dy' d\theta'$ liegt, ist nach Formel 3)

$$dt' = f(x', y', \theta') dx' dy' d\theta'.$$

Da aber nach unserer Definition der Zustandspunkt, so oft er in das Parallelepiped $dx dy d\theta$ eingetreten ist, jedesmal nach der Zeit δt in das Parallelepiped $dx' dy' d\theta'$ eintritt, und auch die Zeitdifferenz zwischen dem Austritte aus dem 1. und 2. Parallelepiped wieder genau δt ist, so folgt, dass der Zustandspunkt in beide Parallelepipede genau gleich oft eintritt und auch jedesmal in beiden gleich lang verweilt, dass also $dt' = dt$ oder

$$f(x', y', \theta') dx' dy' d\theta' = f(x, y, \theta) dx dy d\theta$$

ist. Nun ist aber

$$dx' dy' d\theta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x} & \frac{\partial \theta'}{\partial y} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{vmatrix} \cdot dx dy d\theta.$$

für so leicht, dass ich mich nicht damit aufhalten will. Der zweite Beweis dagegen, dass die durch obige Formel ausgedrückte Verteilung der lebendigen Kraft die einzig mögliche ist, lässt sich nur indirekt durch den Nachweis erbringen, dass eine gewisse eigentümliche Funktion durch die Zusammenstösse nur vergrössert werden kann. Da diese Funktion einerseits mit der von Clausius als Entropie bezeichneten Grösse, anderseits mit der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Zustandes aufs innigste zusammenhängt, ¹⁾ so erscheint dadurch der zweite Hauptsatz als ein reiner Wahrscheinlichkeitssatz.

Diesen letzteren Beweis für das von Lord Kelvin ersonnene, mit elastischen Federn ausgestattete Molekül, welches wir nach seinem Vorgange Dublet nennen wollen, durchzuführen, scheint mir von genügendem Interesse zu sein (siehe Motto!). Unter einem Dublet verstehen wir die Vereinigung zweier materieller Punkte mit den Massen m und m'' , welche sich mit einer ihrer Entfernung proportionalen Kraft anziehen. m'' (der Kern) soll sonst niemals von einer anderen Kraft afficiert werden. Die Massen m (Schalen) je zweier Dublets sollen, wenn sie sich bis zur Distanz D'' nähern, wie elastische Kugeln an einander abprallen. Ausserdem sollen noch einfache Atome mit den Massen m' vorhanden sein, welche unter einander in der Distanz D' , an den Schalen in der Distanz D ebenso abprallen. Wir wollen immer kurz „Schale“ statt Centrum der Schale und „Kern“ statt Centrum des Kerns sagen. Es seien x, y, z die Coordinaten des Kerns eines Dublets bezüglich eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Schale liegt und dessen Axen fixe Richtungen haben; u'', v'', w'' die absoluten, u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten des Kernes relativ gegen die Schale, g, h, k die Geschwindigkeitscomponenten des Schwer-

1) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 76, 1877, Bd. 78, 1878.

$$x = A \sin (at + B), \quad u = Aa \cos (at + B)$$

und zur Zeit 0

$$x_0 = A \sin B, \quad u_0 = Aa \cos B.$$

Betrachtet man alle Dublets, für welche A und B zwischen gewissen, unendlich nahen Grenzen eingeschlossen sind, so ist

$$dx du = dx_0 du_0 = Aa dA dB \quad 4)$$

und ebenso für die y - und z -Axe

$$dy dv = dy_0 dv_0, \quad dz dw = dz_0 dw_0. \quad 5)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung

$$dx dy dz du dv dw = dx_0 dy_0 dz_0 du_0 dv_0 dw_0$$

auch gilt, wenn Kern und Schale eine beliebige andere Centralbewegung machen. (Vgl. meine schon citierte Abhandlung über das Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gas-molekülen.) Würden nun gar keine Zusammenstösse erfolgen, so würden genau für dieselben Dublets, für welche zur Zeit Null die Variablen zwischen den Grenzen x_0 und $x_0 + dx_0 \dots k$ und $k + dk$ lagen, dieselben zur Zeit t zwischen den Grenzen x und $x + dx \dots k$ und $k + dk$ liegen. Schreiben wir daher für einen Augenblick unter dem Functionszeichen χ noch die Variable t explicit, um den Fall einer Veränderlichkeit von χ mit der Zeit nicht von vorne herein auszuschliessen, so ist die Zahl der ersten Dublets

$$\chi(x_0 \dots w_0, g, h, k, 0) d\xi_0 \dots dk = \chi_0 d\xi_0 \dots dk$$

die der letzteren aber

$$\chi(x \dots k, t) dx \dots dk = \chi dx \dots dk.$$

Daher hat man

$$\chi_0 dx_0 \dots dk = \chi dx \dots dk$$

und wegen 4) und 5)

$$\chi_0 = \chi,$$

daher auch

$$\chi_0 l \chi_0 dx_0 \dots dk = \chi l \chi dx \dots dk.$$

v'' und $v'' + dv''$, w'' und $w'' + dw''$, die Coordinaten des Kerns relativ gegen die Schale zwischen x und $x + dx$, y und $y + dy$, z und $z + dz$, ferner die Geschwindigkeitscomponenten des gemeinsamen Schwerpunktes der Schale und des Einzelatoms zwischen den Grenzen p und $p + dp$, q und $q + dq$, r und $r + dr$, endlich die Richtung der Centrilinien der stossenden Atome im Momente des Stosses innerhalb eines unendlich schmalen Kegels von bestimmter Richtung im Raume und unendlich kleiner Oeffnung $d\lambda$ liegt. Die Geschwindigkeitscomponenten des Einzelatoms im Momente des Beginnes des Stosses sind dann

$$u_1 = \frac{m + m'}{m'} p - \frac{m}{m'} u, \quad v_1 = \frac{m + m'}{m'} q - \frac{m}{m'} v, \quad (6)$$

$$w_1 = \frac{m + m'}{m'} r - \frac{m}{m'} w.$$

Für die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeneinheit während der Zeit δt in der hervorgehobenen Weise geschehen, findet man leicht den Wert:

$$dn = D^2 \cdot F(x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w) f(u_1, v_1, w_1) \\ \times V \varepsilon dx \cdots dw'' du dv dw du_1 dv_1 dw_1 d\lambda \delta t.$$

Hiebei ist V die relative Geschwindigkeit beider Atome im Momente des Stosses, ε der Cosinus des spitzen Winkels derselben mit der Centrilinie. Führen wir statt u_1, v_1, w_1 die Variablen p, q, r mittelst der Gleichungen (6) ein, so folgt

$$dn = D^2 F f_1 \left(\frac{m + m'}{m'} \right)^3 V \varepsilon dx \cdots dw'' du dv dw dp dq dr d\lambda \delta t,$$

wobei der unten angehängte Index 1 jedesmal ausdrückt, dass unter dem Funktionszeichen die drei Werte (6) zu substituieren sind.

Durch jeden der hervorgehobenen Zusammenstösse verliert eine Schale die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w durch alle dn Zusammenstösse wird also ΣdF um $dn'F$ vermindert.

Diese Integration soll nun durch einen eigentümlichen Kunstgriff bewerkstelligt werden. Mit dem obigen Gliede, welches die „hervorgehobenen“ Zusammenstösse in das Integrale liefern, vereinigen wir das Glied, welches die „entgegengesetzten“ Zusammenstösse liefern, und ebenso mit jedem andern Gliede des Integrales das durch die „entgegengesetzten“ Zusammenstösse gelieferte Glied.

Wir sagen ein Zusammenstoss ist einem anderen entgegengesetzt, wenn beim ersteren jedes der stossenden Atome im Momente des Beginnes genau denselben Zustand hat, wie beim letzteren im Momente des Endes und umgekehrt; ausserdem müssen natürlich die Mittelpunkte der beiden Atome vertauscht sein, damit vor dem Stosse Annäherung stattfindet. Die übrigen Variabeln $x \dots w''$ sollen für beiderlei Zusammenstösse genau zwischen denselben Grenzen eingeschlossen sein. In der nebenstehenden Zeichnung soll der grösste Kreis eine Schale, der kleinste einen Kern, der mittlere ein Einzelatom darstellen; die vom Centrum aus gezoge-

Dabei ist

$$F_1 = F(x_1, y_1, z_1, u_1'', v_1'', w_1'', u_1, v_1, w_1)$$

$$F_1' = F(x_1, y_1, z_1, u_1'', v_1'', w_1'', u_1', v_1', w_1').$$

u_1, v_1, w_1 und u_1', v_1', w_1' , die Geschwindigkeitscomponenten der zweiten Schale vor und nach dem Stosse muss man sich wieder durch Gleichungen ausgedrückt denken, die den Gleichungen 6 und 7 analog sind. $x_1, y_1, z_1, u_1'', v_1'', w_1''$ sind die übrigen, den Zustand des zweiten Dublets im Momente des Stosses bestimmenden Grössen. Endlich ist

$$dn = D'^2 F F_1 V \varepsilon dx \dots dw'' du dv dw dx_1 \dots dw_1'' dp dq dr dz dt.$$

Ebenso würde sich ergeben

$$2\delta_2 \Sigma lf = \int dn (lf + lf', - lf - lf'),$$

wobei

$$dn = D'^2 f f_1 V \varepsilon du dv dw dp dq dr dz dt.$$

Die angewandten Zeichen dürften hier ohne weiters verständlich sein.

Schale die Componenten u, v, w , ein Einzelatom die Componenten u_1, v_1, w_1 . Ist daher dn' während der Zeit δt in der Volumeneinheit die Zahl der den ursprünglich hervorgehobenen entgegengesetzten Zusammenstöße, so wächst durch diese letzteren $\Sigma lF + \Sigma lf$ um

$$dn' (lF + lf_1 - lF' - lf_1').$$

Daher wächst es durch die ursprünglich hervorgehobenen und die ihnen entgegengesetzten Stöße zusammen um

$$(lF' + lf_1' - lF - lf_1) (dn - dn').$$

Integriert man diesen Ausdruck über alle Werte der Variablen, deren Differenziale in dn und dn' enthalten sind, so erhält man $2 \delta_{12} (\Sigma lF + \Sigma lf)$, da man dann jeden Zusammenstoß doppelt zählt; einmal als ursprünglich hervorgehoben, dann als entgegengesetzten. Da V, ε und $d\lambda$ durch den Stoß nicht geändert werden, so ist

$$dn' = D^2 F' f_1' \frac{(m^3 + m')^3}{m'^3} V \varepsilon dx \cdots dw'' du' dv' dw' dp dq dr d\lambda \delta t.$$

Man findet zudem leicht (am leichtesten auf geometrischem Wege) $du' dv' dw' = du dv dw$ und erhält daher

$$\delta_{12} (\Sigma lF + \Sigma lf) = \frac{\delta t}{2} \int (lF' + lf_1' - lF - lf_1) \quad (8) \\ (Ff_1 - F'f_1') \frac{(m + m')^3}{m'^3} V \varepsilon D^2 du dv dw dp dq dr dx \cdots dw'' d\lambda.$$

Man sieht sofort, dass sich in derselben Weise ergibt:

$$\delta_1 \Sigma lF = 2 \delta t \int (lF' + lF_1' - lF - lF_1) (FF_1 - F'F_1') \cdot \\ \cdot V \varepsilon D'^2 dx \cdots dw'' dx_1 \cdots dw_1'' du dv dw dp dq dr d\lambda \\ \delta_2 \Sigma lf = 2 \delta t \int (lf' + lf_1' - lf - lf_1) (ff_1 - f'f_1') \cdot \\ \cdot V \varepsilon D'^2 du dv dw dp dq dr d\lambda, \quad (9)$$

wobei die Bezeichnungen dieselben sind, wie in der Anmerkung auf Seite 346.

Wir fassen nun einen Stoss ins Auge und bezeichnen die Werte dieser Variabeln im Momente des Stosses, jedoch noch vor demselben, ohne obern Index, die unmittelbar nach dem Stosse dagegen oben mit einem Striche; wir können offenbar die Lage der Centrilinie im Momente des Stosses und die Richtung von c_1 so wählen, dass c , α und β nach dem Stosse ganz beliebige Werte c' , α' , β' annehmen, welche für den Wert c_1' der Variabeln c_1 nach dem Stosse reelle Werte liefern; dieser letztere ist durch die Gleichung der lebendigen Kraft $m' c_1'^2 + m c'^2 = m' c_1^2 + m c^2$ bestimmt. Die Werte der Variabeln c'' , ϱ und α'' dagegen werden durch den Stoss nicht verändert. Die erste der Gleichungen 10) kann daher so geschrieben werden:

$$F(c'', \alpha'', \varrho, c, \alpha, \beta) \cdot f_1(c_1) = F(c'', \alpha'', \varrho, c', \alpha', \beta') \cdot f_1\left(\sqrt{c_1^2 + \frac{m}{m'}(c^2 - c'^2)}\right)$$

Diese Gleichung muss für alle möglichen Werte der Variabeln c'' , α'' , ϱ , c , α , β , c' , α' , β' und c_1 erfüllt sein, woraus man mit Leichtigkeit findet:

$$f_1(c_1) = A_1 e^{-h m' c_1^2}, \quad F = A e^{-h m c^2}.$$

Hiebei sind A_1 und h reine Constanten; A dagegen kann noch die Variabeln c'' , ϱ und α'' enthalten.

Man sieht sofort, dass hieraus die Gleichheit der mittleren lebendigen Kraft einer Schale und eines Einzelatoms folgt, und dass die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung unter den Schalen und Einzelatomen erwiesen ist, ohne dass man Zusammenstösse der Schalen untereinander und der Einzelatome untereinander anzunehmen braucht. Die Annahme, dass auch solche Zusammenstösse vorkommen, ändert an der Verteilung der lebendigen Kraft gar nichts, da durch die gefundenen Werte von f_1 und F die beiden anderen der Gleichungen 10) identisch erfüllt werden. Dagegen wird

$$K = \varrho \sqrt{c^2 \sin^2 \alpha + c'^2 \sin^2 \alpha'' - 2cc' \sin \alpha \sin \alpha'' \cos \beta},$$

die mit $m + m''$ multiplicierte Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Dublets ist

$$G = \sqrt{m^2 c^2 + m'^2 c'^2 + 2mm'cc'(\cos \alpha \cos \alpha'' + \sin \alpha \sin \alpha'' \cos \beta)}$$

und sie hat senkrecht zur Bahnebene die Componente

$$H = \frac{cc' \sin \alpha \sin \alpha'' \sin \beta}{\sqrt{c^2 \sin^2 \alpha + c'^2 \sin^2 \alpha'' - 2cc' \sin \alpha \sin \alpha'' \cos \beta}}.$$

Die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche K, L, G, H zwischen den Grenzen

K und $K + dK$, L und $L + dL$, G und $G + dG$, H und $H + dH$ liegen, soll

$$\Phi(K, L, G, H) dK dL dG dH$$

heissen. Die Zahl derjenigen unter allen diesen Dublets, für welche noch ϱ zwischen ϱ und $\varrho + d\varrho$ liegt, ist

$$\Phi \cdot dK dL dG dH \cdot \frac{d\varrho}{\sigma} : \int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\sigma} = \Psi dK dL dG \cdot dH \frac{d\varrho}{\sigma}.$$

Hiebei ist $\sigma = \frac{d\varrho}{dt}$, $\int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\sigma}$ ist die Zeit, welche von einem

Peri- bis zu einem Apocentrum vergeht, also eine gegebene

Funktion von K, L, G, H ; $\Psi = \Phi : \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sigma}$ ist ebenfalls eine

Funktion dieser 4 Grössen. Beschränken wir uns auf jene Dublets, für welche 1. noch die letzte Apsidenlinie der Bahn mit einer in der Bahnebene einer fixen Ebene parallel gezogenen Geraden einen Winkel bildet, der zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, 2. die beiden durch die Geschwindigkeit des Schwerpunkts normal zur Bahnebene und parallel einer fixen Geraden Γ gelegten Ebenen einen Winkel bilden, der zwischen

ω und $\omega + d\omega$ liegt, und endlich 3. noch die Geschwindigkeitsrichtung des Schwerpunkts innerhalb eines Kegels von gegebener Richtung und unendlich kleiner Oeffnung $d\lambda$ fällt, so haben wir noch mit $d\epsilon d\omega d\lambda : 16\pi^3$ zu multiplicieren. Die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, welche alle diese Bedingungen erfüllen, ist daher

$$\psi \cdot \frac{1}{16\pi^3\sigma} dK dL dG dH d\varrho d\epsilon d\omega d\lambda. \quad 11)$$

Bezeichnen wir mit g und $g + dg$, h und $h + dh$, k und $k + dk$ die Grenzen, zwischen denen für die Dublets die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes bezüglich der fixen rechtwinkligen Coordinatenachsen liegen, so ist

$$G^2 dG d\lambda = dg dh dk.$$

Nun lassen wir g , h und k constant, legen durch die Schale (deren Centrum) ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z -Axe die Richtung von G hat, bezeichnen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des Kerns bezüglich dieses Systems mit $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1$ und transformieren diese 6 Variabeln in $K, L, H, \varrho, \epsilon, \omega$. Wir führen da ein zweites Coordinatensystem ein, bezüglich dessen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der Schale mit $x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2$ bezeichnet werden sollen. Die z -Axe des 2. Systems soll senkrecht zur Bahnebene, die x -Axe in deren Durchschnittlinie mit der alten xy -Ebene liegen. Es ist dann

$$H = G \sin \vartheta,$$

wenn $90 - \vartheta$ der Winkel beider z -Axen ist; daher, weil G constant ist,

$$dH = G \cos \vartheta d\vartheta.$$

Endlich bezeichnen wir den Winkel der beiden x -Axen mit ω , da er sich von dem früher so bezeichneten Winkel jedenfalls nur um einen Betrag unterscheidet, den wir jetzt als constant zu betrachten haben. Wir finden:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \vartheta \sin \omega + y_1 \cos \vartheta \cos \omega + z_1 \sin \vartheta \\w_2 &= u_1 \cos \vartheta \sin \omega + v_1 \cos \vartheta \cos \omega + w_1 \sin \vartheta,\end{aligned}$$

welche beide Ausdrücke verschwinden müssen, da die x_2, y_2 -Ebene Bahnebene ist. Mittelst dieser beiden Gleichungen kann man bei constantem x_1, y_1, u_1, v_1 zunächst ϑ, ω statt z_1, w_1 einführen und findet

$$dz_1 dw_1 = (y_1 u_1 - x_1 v_1) \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} d\vartheta d\omega.$$

Nun ist weiter

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \omega - y_1 \sin \omega \\y_2 \sin \vartheta &= x_1 \sin \omega + y_1 \cos \omega\end{aligned}$$

und analoge Gleichungen folgen für u_2, v_2, u, v . Daraus folgt

$$y_1 u_1 - x_1 v_1 = \sin \vartheta (y_2 u_2 - x_2 v_2) = K \sin \vartheta$$

und bei constantem ϑ und ω

$$dx_2 dy_2 \sin \vartheta = dx_1 dy_1; \quad du_2 dv_2 \sin \vartheta = du_1 dv_1,$$

daher

$$dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 = K \cos \vartheta dx_2 dy_2 du_2 dv_2 d\vartheta d\omega.$$

Nun bezeichnen wir, wie früher, mit σ und τ die Geschwindigkeitscomponenten der Relativbewegung von Schale und Kern in der Richtung von ϱ und senkrecht darauf; dann ist bei constantem x_2 und y_2

$$\begin{aligned}d\sigma d\tau &= du_2 dv_2 \\K &= \varrho \tau, \quad L = L_0 + \frac{mm''}{2(m+m'')} (\sigma^2 + \tau^2) + \varphi(\varrho) \\dK dL &= \frac{mm''}{m+m''} \sigma \varrho d\sigma d\tau,\end{aligned}$$

wobei L_0 die jetzt constant betrachtete Energie der Schwerpunktsbewegung ist. Ist endlich ψ der Winkel zwischen ϱ und der letzten Apsidenlinie, so folgt

$$x_2 = \varrho \cos(\varepsilon + \psi), \quad y_2 = \varrho \sin(\varepsilon + \psi),$$

wobei ψ Funktion von ϱ , K und L ist; letztere beide sind jetzt constant, daraus folgt

$$\varrho d\varrho d\varepsilon = dx_2 dy_2.$$

Fasst man alles zusammen, so ist:

$$dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 = \frac{m+m''}{mm''} \frac{K}{\sigma} dK dL dH d\varrho d\omega d\varepsilon$$

und man sieht sofort, dass, wenn sich Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten ohne Index auf ein beliebig gelegenes fixes Coordinatensystem beziehen, ebenfalls

$$dx dy dz du dv dw = \frac{m+m''}{mm''} \frac{K}{\sigma} dK dL dH d\varrho d\omega d\varepsilon$$

sein muss. Führen wir diess in den Ausdruck 11) ein und bedenken noch, dass bei constantem u , v , w

$$dg dh dk = \frac{m''^3}{(m+m'')^3} du'' dv'' dw'',$$

so findet man

$$\frac{1}{16\pi^3} \frac{mm''^4}{(m+m'')^4} \frac{\psi}{KG_2} dx dy dz du dv dw du'' dv'' dw''$$

als die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variablen $x \dots w''$ zwischen x und $x+dx \dots w''$ und $w''+dw''$ liegen. Da wir für diese Zahl früher den Ausdruck

$$F \cdot dx dy dz du dv dw du'' dv'' dw''$$

fanden und sahen, dass F die Form haben muss Ae^{-hmc^2} , wobei A nur Funktion von c'' , ϱ und α'' sein kann, so folgt, wenn wir jetzt setzen

$$F = Be^{-h(mc^2 + m''c''^2 + 2\varphi(\varrho))}.$$

dass B einerseits nur Funktion von c'' , ϱ und α'' , anderseits nur Funktion von K , L , G und H sein kann.

Es muss B also eine solche Funktion dieser letzteren Variablen sein, welche von den Werten von c , α und β ganz unabhängig und bloss Funktion von c'' , ϱ und α'' ist. Setzen wir $\beta = 0$, so wird

$$K = \varrho (c'' \sin \alpha'' - c \sin \alpha)$$

$$G^2 = m^2 c^2 + m''^2 c''^2 + 2 m m'' c c'' \cos (\alpha'' - \alpha)$$

$$H = 0,$$

während

$$L = \frac{m c^2}{2} + \frac{m'' c''^2}{2} + \varphi (\varrho)$$

ist. Die Elimination von c und α aus diesen Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned} & c''^2 \sin^2 \alpha'' [(m + m'') (2L - \varphi) - G^2] - \\ & - K \sin \alpha'' [m (2L - \varphi) + m'' (m + m'') c''^2 - G^2] + m m'' K^2 + \\ & \varrho^2 \left\{ m''^2 c''^2 - m'' (2L - \varphi) + \frac{1}{4 m m'' c''^2} [G^2 - m (2L - \varphi) + m' (m - m'') c''^2]^2 \right\} \\ & = 0. \end{aligned}$$

Denken wir uns aus dieser Gleichung etwa c'' bestimmt, so sollen wir erhalten $c'' = \chi (\alpha'', \varrho, L, G, K)$. Wir wissen nun, dass B sich sowohl als Funktion von c'' , α'' , ϱ , als auch von L , G , K ausdrücken lassen, also

$$B = F (\chi, \alpha'', \varrho) = \Psi (L, G, K).$$

Diese Gleichung muss auch für $\alpha'' = 0$ gelten; es muss also $F (\chi, 0, \varrho)$ bloss Funktion von L , G , K sein, welche wegen der Willkürlichkeit von c und α auch für $\alpha'' = 0$ noch independent sind. Für $\alpha = 0$ wird:

$$\begin{aligned} & m''^2 (m + m'')^2 c''^4 + \hspace{15em} 12) \\ & + 2 m'' c''^2 [(m - m'') D + 2 m^2 m'' \frac{K^2}{\varrho^2} + (\varphi - 2L) m (m + m'')] + \\ & + [D + m (\varphi - 2L)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$(m - m'') D - 2m(m + m'') L = \xi, \quad D - 2m L = \eta, \\ 2m^2 m'' K^2 = \zeta,$$

so müsste sich $F(c'', \varrho)$ auf eine Funktion von ξ, η, ζ reducieren, wenn darin c'' durch Gleichung 12) als Funktion von ϱ, L, D, K ausgedrückt wird. Da durch Veränderung von c und α bewirkt werden kann, dass sich ξ und η unabhängig von c'', α'' und ϱ verändern, so muss auch

$$\frac{\partial F'}{\partial c''} \cdot \frac{\partial c''}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F'}{\partial c''} \cdot \frac{\partial c''}{\partial \eta}$$

von ϱ unabhängig sein. Diess kann aber wegen

$$\frac{\partial c''}{\partial \zeta} = \varrho^2 \frac{\partial c''}{\partial \xi}$$

nur stattfinden, wenn entweder $\frac{\partial c''}{\partial \xi}$ oder $\frac{\partial F'}{\partial c''}$ verschwindet.

Erstere Grösse hat den Wert

$$\frac{c''}{2m''(m + m'')^2 c''^2 + 2\xi + \frac{2\zeta}{\varrho^2} + 2m(m + m'')\varphi}$$

kann also nicht allgemein verschwinden, da c'', ϱ, ξ und ζ auch für $\alpha'' = \beta = 0$ noch unabhängig von einander geändert werden können. Es muss also F' von c'' und daher auch von ϱ unabhängig sein; daraus folgt sofort, dass es auch von α'' unabhängig ist, da ja α'' nicht als Funktion von L, G und K allein ausdrückbar ist. Es muss also F' oder B eine Constante sein, womit die Verteilung der lebendigen Kraft endlich eindeutig bestimmt ist. Vorausgesetzt ist dabei noch, dass φ so beschaffen ist, dass Kern und Schale überhaupt beisammen bleiben, und auch nicht in einen Punkt zusammenschrumpfen, da sonst die obigen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen unzulässig werden.

[illegible]

Obgleich die bisherigen wissenschaftlichen Arbeiten des Vereins naturgemäss mehr den Charakter von Vorstudien auf diesem schwierigen Gebiet tragen, so enthalten die beiden Jahresberichte des Vereins doch schon einige Abhandlungen mit nicht unwichtigen Ergebnissen, von denen hier einige angeführt seien.

Herr Professor Finsterwalder hat ermittelt, dass bei der wissenschaftlichen Fahrt am Mittag des 25. Juni 1890 in den verschiedenen Höhen mit grosser Annäherung solche Temperaturen beobachtet wurden, wie sie im aufsteigenden Luftstrom bei Condensation theoretisch gefordert werden. Theoretisch sollte unter den damaligen Verhältnissen die Condensation etwas oberhalb 1500 m Meereshöhe beginnen. Und thatsächlich drang der Ballon bei circa 1400 m Meereshöhe in Wolken ein, deren obere Grenze erst nach einer weiteren Steigung von 1000 m überschritten wurde.

Herr Dr. Erk hat eine Vereinsfahrt bearbeitet, die zwar nicht eine eigentlich wissenschaftliche war, bei der aber doch sorgfältige Temperaturbeobachtungen angestellt wurden. Sie wurde in der Mittagszeit des 11. Dezember 1890 ausgeführt. In 600 m über dem Boden drang der Ballon in eine sehr weit ausgedehnte, aber nur 100 m mächtige Wolkenschicht ein, die er während der ganzen weiteren Fahrt unter sich liess. Während unter und in der Wolkenschicht Temperaturen unterhalb des Eispunkts beobachtet wurden, herrschte oben viel höhere Temperatur, und zwar über 0°. Die Wolkenbank bildete die Grenze eines unteren kalten Ostwindes, der eine schwach aufsteigende Tendenz hatte, und eines oberen warmen Nordostwindes, dessen Erwärmung durch sein Herabsinken, also dynamisch, bedingt war.

Herr Dr. Erk und Herr Professor Finsterwalder haben gemeinsam diejenigen Beobachtungen bearbeitet, welche Herr Professor P. Vogel in dem v. Sigfeldschen Ballon am 10. Juli 1889 Vormittags angestellt hat. Die

Eine besonders wichtige Aufgabe ist ferner die Beobachtung von Lufttemperaturen bei Nacht, weil dadurch die Gefahr vom erwähnten Bojen aufsteigender Strömung vermieden wird. Eine Störung mehr bestehender Kinder. Immer werden im Hochsommer Nachmittage von Mitternacht bis zur Morgensonnezeit beobachtet sein, und es wird versucht werden, zum Zweck der Polarisierung der Angaben der Instrumente, möglichst Bestimmung der Gleichzeitigkeit zu treffen, weil solche Bestimmungen zu festgestellten sein werden.

Die hier beschriebene Zeit war nicht so beschaffen, wie jene des ersten Versuches zur Förderung der Luftschiffahrt. Obwohl bekanntlich schon Balloons im Jahre 1783 in Paris aufsteigen und ein gewisses Ziel erreichen konnten, so wurde doch erst in der Zeit von 1804 bis 1806 die Luftschiffahrt in der That als eine Wissenschaft betrachtet. In dieser Zeit wurde die Luftschiffahrt in der That als eine Wissenschaft betrachtet. In dieser Zeit wurde die Luftschiffahrt in der That als eine Wissenschaft betrachtet. In dieser Zeit wurde die Luftschiffahrt in der That als eine Wissenschaft betrachtet.

Verein 3000 Mark zur Beschaffung wissenschaftlicher Instrumente und stellte dem Verein überdies seinen Privatballon M. W. zur Verfügung (ähnlich wie unser Verein den Privatballon des Herrn v. Sigsfeld dauernd benutzen durfte, so lange er noch brauchbar war). Bekanntlich hat nun vor kurzem S. Majestät der Kaiser Wilhelm ein von mehreren Gelehrten, namentlich auch von v. Helmholtz unterzeichnetes Immediatgesuch damit beantwortet, dass er für die Zwecke des Berliner Vereins 50000 Mark anwies.

Angesichts aller vorstehenden Erwägungen und tatsächlichen Mitteilungen ist die hohe Klasse vielleicht geneigt, meiner Bitte zu willfahren und zu Gunsten des Münchener Vereins für Luftschiffahrt eine Erklärung abzugeben, durch welche die wissenschaftlichen Bestrebungen des Vereins als für die Wissenschaft förderlich anerkannt werden.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner
Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1892.

Die Festsitzung wurde mit folgenden Worten des Präsidenten der Akademie, Geh.-Raths Dr. von Pettenkofer, eröffnet:

„Die heutige Festsitzung der k. Akademie der Wissenschaften findet statt zu Ehren ihres Protector, Sr. K. Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold von Bayern, dessen Namensfest hiemit gefeiert wird. Die Akademie blickt jedes Jahr an diesem Tage dankbar auf zu ihrem Protector, dabei ihrer Stiftung und Entwicklung durch allerhöchst dessen Vorfahren aus dem Hause Wittelsbach gedenkend, welche gleich unserm Protector nicht nur Herren, sondern auch Freunde und Förderer ihres Landes waren.

Dieser Tag ist jährlich auch dazu bestimmt, die Wahlen neuer Mitglieder zu verkünden, nachdem die allerhöchste Bestätigung derselben erfolgt ist.

Die Mitglieder der Akademie theilen sich in ordentliche und ausserordentliche, am Sitze der Akademie wohnende, und in auswärtige und correspondirende. Sie gehören der philosophisch-philologischen, der mathematisch-physikalischen und der historischen Classe an. Neben diesen drei Fachclassen hat die Akademie auch Ehrenmitglieder, als welche

Personen gewählt werden, welche nicht Fachleute zu sein brauchen, aber sich durch Liebe zu den Wissenschaften und durch Unterstützung derselben verdient gemacht haben.

Ich habe heute zunächst als Präsident die Wahl eines Ehrenmitgliedes zu verkünden, und zwar — was bisher noch nicht dagewesen ist — eines weiblichen.

Nach den zur Zeit gültigen Gesetzen können Frauen nicht Mitglieder einer der drei Classen der Akademie werden, auch nicht, wenn sie sich in einer Fachwissenschaft vor Männern hervorgethan haben. Anders liegt es bei den Ehrenmitgliedern. Die Constitutionsurkunde der k. Akademie der Wissenschaften vom 1. Mai 1807 bestimmt, dass zu Ehrenmitgliedern Persönlichkeiten gewählt werden können, „welche nach ihren Verhältnissen die Bedingungen zu ordentlichen Mitgliedern nicht erfüllen, aber sonst durch Rang oder andere äussere Verhältnisse, verbunden mit wissenschaftlichen Kenntnissen und Liebe zu den Wissenschaften, zur Beförderung der Zwecke der Akademie beitragen können.“

Es konnte uns nur erfreulich sein, eine Dame von hohem Range, aus dem Hause Wittelsbach zu wissen, welche alle diese Vorbedingungen in reichem Maasse erfüllt hat. Sie hat durch ausgebreitete gründliche Sprachstudien, durch Anlage werthvoller naturwissenschaftlicher Sammlungen, wovon sie interessante Stücke auch den wissenschaftlichen Sammlungen des Staates einverleibte, nicht nur grosse Liebe zu den Wissenschaften schon gezeigt, sondern ist auch literarisch unter dem Pseudonym Th. von Bayer durch Beschreibung ihrer Reisen nach Norwegen, in den Polarkreis und nach Russland hervorgetreten. Gegenwärtig arbeitet die hohe Dame wieder an einem grossen Reisewerk über Brasilien.

Die Gesamt-Akademie wählte demnach Ihre Königliche Hoheit Prinzessin Therese von Bayern zum Ehrenmitgliede.“

Wahlen.

Von der mathematisch - physikalischen Classe wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

zu ordentlichen Mitgliedern:

Das bisherige ausserordentliche Mitglied Herr Dr. Walther Dyck, o. Professor für Mathematik an der technischen Hochschule dahier;

Herr Joh. Bauschinger, o. Professor für Mechanik an der technischen Hochschule dahier;

Herr Dr. Karl Goebel, o. Professor für Botanik an der Universität München;

zu correspondirenden Mitgliedern:

Geh. Regierungsrath Dr. Wilhelm Foerster, o. Professor für Astronomie an der Universität und Director der k. Sternwarte zu Berlin;

Herr Dr. Alexander Rollet, o. Professor für Physiologie an der Universität Graz.

Für die laufenden Publicationen der Akademie, Sitzungsberichte, Denkschriften u. s. w. werden regelmässig im Etat durch das Finanzgesetz die erforderlichen Mittel bewilligt. Daneben unterstützt die Akademie mit den bescheidenen Mitteln, welche ihr der Verkauf ihrer Schriften gewährt, besondere wissenschaftliche Arbeiten in den drei Classen, so früher in der philosophisch-philologischen Classe die Herausgabe von Wölfflins Archiv für lateinische Lexikographie und Grammatik, und neuerdings Krumbachers Byzantinische Zeitschrift; in der mathematisch-physikalischen Classe den Druck des schon von Lamont begonnenen Sternkatalogs. Ebenso wurden Fraunhofers gesammelte Werke herausgegeben und ist die Herausgabe der Schriften des Mathematikers Otto Hesse in Vorbereitung. Die historische Classe gibt die Monumenta Tridentina heraus, ein Quellenwerk ersten Ranges für die Geschichte des Trienter Concils, welches Werk leider im Augenblick durch den Tod des Verfassers, unseres Mitgliedes August v. Druffel, unterbrochen ist und eines Vollenders harret.“

Sitzung vom 3. Dezember 1892.

1. Herr E. LOMMEL macht eine Mittheilung: „Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens.“

2. Herr W. DYCK legt vor und bespricht den Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, welcher aus Anlass der beabsichtigten mathematischen Ausstellung bei der unterbliebenen Naturforscherversammlung zu Nürnberg mit Unterstützung der k. b. Akademie und des Reiches von Herrn DYCK herausgegeben wurde.

- - - - -

selbst, und das Aufflammen eines Zündhölzchens genügt, um das Bild dem lichtempfindlichen Papierblatt einzuprägen. Mit Beiseitelassung der einfacheren und bekannteren Fälle seien von den zahlreichen Aufnahmen hier nur zwei minder gewöhnliche Beispiele wiedergegeben. Fig. 1 zeigt die Aequipotentialen einer ringförmigen, von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Platte, mit Elektroden an den Endpunkten eines Durchmessers des äusseren Kreises. Da die Aequipotentiallinien nur auf der Platte selbst, nicht aber auf ihrer nichtleitenden Unterlage entstehen, so geben sie zugleich ein durch jene Linien schraffirtes Bild der Platte selbst; in derselben Weise bilden sich auch die Zuleitungsdrähte ab. Die Figur 2 wurde erzeugt über einer rechteckigen Platte mit einem kreisrunden Loch und Elektroden an zwei gegenüberliegenden Ecken; auch hier ist das Bild der Platte sammt ihren Zuleitungsdrähten deutlich zu erkennen.

Die Erkenntniss, dass die Aequipotentialen Magnetkraftlinien sind, legte den Gedanken nahe, dass die Lagenänderung der Aequipotentiallinien in einem Magnetfelde, wie sie im Hall'schen Phänomen beobachtet wird, vielleicht als eine unmittelbare Wirkung der Kraftlinien des Magnetfeldes auf die Kraftlinien der Strömung angesehen werden könne. Sind jedoch die Magnetkraftlinien zur Platte parallel, so zeigt sich das Hall'sche Phänomen bekanntlich nicht. Nähert man der durchströmten Platte in ihrer Ebene irgendwo von seitwärts einen Magnetpol, so ordnen sich die Feilspäne in Linien, welche augenscheinlich die Resultanten sind aus den beiden Systemen von Kraftlinien, deren jedes unabhängig für sich bestehen bleibt. Von einer unmittelbaren Wirkung der Magnetkraftlinien auf die Aequipotentialen kann also nicht die Rede sein.

Das Hall'sche Phänomen wird vielmehr nur hervorgerufen durch Magnetkraftlinien, welche senkrecht zur Platte

oder genähert, wenn r gegen R klein ist (eine für das Gelingen des Hall'schen Versuches erforderliche Bedingung):

$$\varepsilon = 2e \frac{R}{r}.$$

Die Grösse $2e$ ist offenbar der Stärke M des Magnetfeldes proportional. Da sie ferner mit dem Primärstrome verschwindet, so setzen wir sie auch dessen Stromstärke J proportional. Wir denken uns nämlich die Wirkung jener Molekularströme als eine Art Reibung, welche für sich keine Bewegung hervorrufen, sondern nur vorhandene Bewegung ändern kann. Wir setzen demnach

$$2e = \kappa J M,$$

wo κ eine Art Reibungscoëfficient vorstellt, der von der molekularen Beschaffenheit des Plattenmaterials abhängt. Der Widerstand R der Platte ist ihrem Querschnitt, also auch ihrer Dicke δ umgekehrt proportional. Fasst man alle beim Versuch unverändert bleibenden Grössen in einen constanten Factor K zusammen, so ergibt sich die elektromotorische Kraft des Hall'schen Stromes:

$$\varepsilon = K \cdot \frac{J M}{r \delta};$$

dieselbe ist also direct proportional der Stärke des Primärstromes und des Magnetfeldes, umgekehrt proportional der Dicke der Platte und dem Widerstande des Galvanometers, was mit den Ergebnissen der Erfahrung in vollkommenem Einklang steht.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1892.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten. — Die zunächst für die philos.-philol. u. histor. Classe bestimmten Druckschriften sind in deren Sitzungsberichten 1892 Heft IV verzeichnet.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XV, part 1. 1892. 8°.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen aus dem Osterlande. N. F. Band V. 1892. 8°.
Verzeichniss der Mitglieder. 1892. 8°.

Société d'études scientifiques in Angers:

Bulletin. Nouv. Sér. Année 20, 1890. 1891. 8°.

Texas Academy of Science in Austin:

Transactions. Vol. I. Nr. 1. 1892. 8°.

Peabody Institute in Baltimore:

25th annual Report. June 1, 1892. 8°.

Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië in Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 51. 1892. 8°.

K. Preuss. geologische Landesanstalt in Berlin:

Abhandlungen. N. F. Heft 11. 1892. 8°.
Jahrbuch für das Jahr 1890. 1892. 8°.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 25. Jahrg. Nr. 12—18. 1892. 8°.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 44, Heft 2. 1892. 8°.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. V. Register. Bd. VI. Nr. 7—18. 1892. 8°.

K. meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1889 Heft 3. 1892 Heft 1. 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXI. Heft 3. 1892. 8°.

K. Sternkarte in Berlin:

Beobachtungs-Ergebnisse. Heft 6. 1892. 4°.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in Berlin:

Gartenflora, Zeitschrift. 41. Jahrg. 1892. 8°.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. 1892. Nr. 27—52. 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde:

Zeitschrift. XII. Jahrg. 1892. Heft 7—12. Berlin. 1892. 8°.

Allgemeine schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Bd. 32, Abth. 2. Basel 1891. 4°.

Actes de la Société Helvétique des sciences naturelles réunie à Fribourg les 19 à 21 août 1891. Fribourg 1892. 8°.

Comptes rendus des travaux présentés à Fribourg les 19 à 21 août 1891. Genève 1891. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen aus dem Jahre 1891. Nr. 1265—1278. 1892. 8°.

Philosophical Society in Birmingham:

Proceedings. Vol. VII, part 2. 1891. 8°.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn.

Verhandlungen. 49. Jahrg. 1. Hälfte. 1892. 8°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1892. Nr. 12—22. 8°.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 43. 1889. 8°.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Memorial of Joseph Lovering, late President of the Academy. Cambridge. 1892. 8^o.

Proceedings. Vol. XXVI. 1891. 8^o.

Verein für Naturwissenschaften in Braunschweig:

Kloos, Ueber die geolog. Verhältnisse des Untergrundes von Braunschweig. 1891. 8^o.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Serie. Tom. 6 Nr. 6—9. 1892. 8^o.

Mémoires couronnés in 8^o. Tom. XI, fasc. 5. 1892. 8^o.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Természettudományi Értekezések (Naturwissenschaftl. Abhandlungen) Bd. XXI. 4. Bd. XXII. 1—3. 1891—92. 8^o.

Mathematikai Értekezések. Bd. XIV. 5. Bd. XV. 1. 1891—92. 8^o.

Mathematikai Értesítő. (Mathematischer Anzeiger) Band X, 1—7. 1891—92. 8^o.

Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mittheilungen). Band XXIV, 8—10. 1891. 8^o.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte. Band IX, 1. 2. Bd. X, 1. Berlin 1892. 8^o.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

A m. kir. Földtani intézet évkönyve. Bd. X. Nr. 2. 3. 1892. 8^o.

Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. X. Nr. 1. 2. 1892. 8^o.

Földtani Közlöny. Bd. XXII. Nr. 5—10. 1892. 8^o.

Supplement Katalog. 1892. 8^o.

K. Ungarische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Budapest:

Pungur, Gryllodea regni Hungariae. 1891. 4^o.

Hermann, Petényi der Begründer der wissenschaftlichen Ornithologie in Ungarn. 1891. 4^o.

Daday, Literatura zoologica Hungarica. 1891. 8^o.

Instituto de marina de San Fernando in Cadix:

Almanaque náutico para 1894. Madrid 1892. 4^o.

Anales. Seccion 2^a. Observaciones meteorológicas. Año 1891. 1892 fol.

Meteorological Department of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. August—Dezember 1891. Januar—Mai 1892. fol.

Meteorological Observations. August—Dezember 1891. Januar—Mai 1892. fol.

Indian Meteorological Memoirs. Vol. V. part 1. 1892. fol.

Cyclone Memoirs. Part III. 1890. 8^o.

Revenue and Agricultural Department of the Government of India in Calcutta:

Memorandum on the snowfall in the mountain districts. 1892. fol.

Indian Museum in Calcutta:

List of the Batrachia by W. L. Seider. London 1892. 8°.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXV. part 2. 3. 1892. 4°.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VII. part 6. 1892. 8°.

Transactions. Vol. XV. part 3. 1892. 4°.

Museum of comparative Zoology in Cambridge:

Memoirs. Vol. XIV. Nr. 2. 1892. 4°.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge Mass:

Annals. Vol. XV. part 2. Karlsruhe 1892. 4°.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV. Vol. 4. 1892. 4°.

Bullettino mensile 1892. Fasc. 26—29. 8°.

Observatory in Cincinnati:

Publications. Nr. XII. 1892. 4°.

K. Sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1891. 1. Hälfte. 1892. 4°.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tom. 27. Paris 1891. 8°.

Universität in Christiania:

Jahrbuch des meteorol. Instituts 1890. 1892. 4°.

Archiv for Mathematik. Bd. XV, 2. 3. 1892. 8°.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 32. Heft 4. 1892. 8°.

Axel Johannesen, Die epidemische Verbreitung des Scharlachfiebers in Norwegen. 1884. 8°.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. 35. Jahrg. 1890/91. 1892. 8°.

Chemiker Zeitung in Cöthen:

Chemiker Zeitung. Nr. 49—52. 55—100. Cöthen 1892. fol.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mittheilungen. N. F. Band 1. Jahrg. 1889 u. 1890. 1891. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. VIII. Heft 1. 1892. 4^o.

Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Gesellschaft.
1893. 8^o.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tom. VII, 2. 3. 4. 1892. 4^o.

Colorado scientific Society in Denver:

Report on technical determination of Zinc. Pueblo 1892. 8^o.

The Post-Lamarie Beds of Middle Park, Colo. by Whitman Cross.
1892. 8^o.

F. C. Knight, A volumetric method. 1892. 8^o.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XII. Janvier—Août 1891. 8^o.

Meteorologisches Observatorium in Dorpat:

Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1891. Bd. 6. Heft 1. 1892. 8^o.

Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat:

Sitzungsberichte. Bd. IX. Heft 3, 1891. 1892. 8^o.

Schriften Nr. VI. 1891. 4^o.

Kais. livländische gemeinnützige u. ökonomische Sozietät in Dorpat:

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen für die Jahre 1889—1891. 1892. 4^o.

Pollichia in Dürkheim a. d. H.:

Festschrift zur 50jährigen Stiftungsfeier. 1892. 8^o.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. IV. 1892. 8^o.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

75. Jahresbericht für die Jahre 1890/91. 1892. 8^o.

R. Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Serie. Vol. XV. disp. 2. 1892. 8^o.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt:

Abhandlungen. Bd. XVII, 1. 2. 1884--91. 4^o.

Bericht. 1892. 8^o.

O. Boettger, Katalog der Batrachier Sammlung im Museum der Gesellschaft. 1892. 8^o.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für das Jahr 1890/91. 1892. 8^o.

Naturwissenschaftl. Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. 9. Jahrg. Nr. 11. 12. 10. Jahrg. Nr. 1—8. 1892. 8°.
Societatum Litterae. 6. Jahrg. Nr. 1—10. 1892. 8°.

Sternwarte in Genf:

Résumé météorologique de l'année 1891 pour Genève. 1892. 8°.

Kruidkundig Genootschap Dodonaea in Gent:

Botanisch Jaarboek 4. Jaarg. 1892. 8°.

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Serie II. Vol. 10. 11. 1890—92. 8°.

University Observatory in Glasgow:

Second Glasgow Catalogue of 2156 Stars, by Robert Grant. 1892. 4°.

The Journal of comparative Neurology in Granville:

Journal. Vol. II. p. 21—136. 1892. 8°.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz:

Mittheilungen. XXVII. Vereinsjahr 1891. 1892. 8°.

K. Niederländ. Regierung in Haag:

Nederlandsch kruidkundig archief. II. Ser. Dell VI. Stuk 1. Nijmegen 1892. 8°.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax, Nova Scotia:

Proceedings and Transactions. Vol. I. part. 1. 1891. 8°.

Kais. Leop.-Carolinische Akademie der Naturforscher in Halle a/S.:

Leopoldina. Heft XXVIII. Nr. 11—20. 1892. 4°.

Naturw. Verein für Sachsen und Thüringen in Halle a/S.:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 65. Heft 1—3. Leipzig 1892. 8°.

Société Hollandaise des sciences in Harlem:

Archives Néerlandaises. Tom. XXV, 5. XXVI, 2. 3. 1892. 8°.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:

Fennia. Bd. 5. 1892. 8°.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

Carte géologique de la Finlande, livr. 18—21 accomp. de renseignements. 1890—92.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. XXVII, 1. 2. 1892. 8°.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mittheilungen 1891. 1892. 8°.

K. K. Berg-Akademie in Leoben:

Programm für das Jahr 1892/93. 8°.

Zeitschrift „La Cellule“ in Löwen:

La Cellule. Tom. VIII, fasc. 1. 1892. 4°.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 50 Nr. 307. Vol. 51. Nr. 310—316. 1892. 8°.

Philosophical Transactions. Vol. 182. A. u. B. 1892. 4°.

List of the Members. 30. Novemb. 1891. 4°.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 52. Nr. 8. 9. Vol. 53. Nr. 1. 1892. 8°.

Memoirs. Vol. 50. 1890—91. 1892. 4°.

Chemical Society in London:

Journal. Nr. 356—361. July—December 1892. 8°.

Proceedings. Nr. 114. 115. 116. 1892. 8°.

Geological Society in London:

The Quarterly Journal. Vol. 48, part 1—4. 1892. 8°.

Linnean Society in London:

Transactions. Botany. Vol. III, part 4—7. 1891/92. 4°.

The Journal. Zoology. Nr. 148—151.

Botany. Nr. 176. 194—201. 1891/92. 8°.

Proceedings. Nov. 1888—June 1890. 1891. 8°.

List of the Members 1891/92. 8°.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1892. part 4—6. 8°.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1892. part 2. 3. 8°.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Vol. 46. Nr. 1180—1206. 1892. 4°.

Institut de physique à l'Université de Liège in Lüttich:

Sur un état de la matière caractérisé par l'indépendance de la pression
par P. de Heen. Bruxelles 1892. 8°.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 19. livr. 2. 3. 1891/92. 8°.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Années 1888. 1889. 1890. 1889—91. 4°.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. VIII. 1888—91. 1892. 8^o.

The Governor in Council in Madras:

Results of observations of the fixed stars at the Government Observatory Madras in the years 1874—1876. By C. Michie Smith. 1892. 4^o.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 33, fasc. 1. 2. 1890—91. 8^o.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. I. 1891. 4^o.

Public Library of Victoria in Melbourne:

Ferd. v. Müller, Iconography of Australian Salsolaceous Plants. IX. Decade. 1891. 4^o.

Observatorio Meteorologico-Magnético Central in Mexico:

Boletin mensual. Tom. III. Nr. 4. 1892. 4^o.

Sociedad científica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias y revista. Tom. V. cuad 9. 10. Tom. VI. cuad 1. 2. 1892. 8^o.

Sociedad de geografia in Mexico:

Boletin. IV^a época. Tom. II. Nr. 3—5. 1891—92. 8^o.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Ser. Tom. II. Nr. 2. 1892. fol.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Ser. III. Vol. XI. fasc. 1. 2. 1892. 8^o.

Académie des sciences in Montpellier:

Mémoires. Sciences. Tom. XI. Nr. 2. 1891. 4^o.

Mémoires. Médecine. Tom. VI. Nr. 2. 1891. 4^o.

Royal Society of Canada in Montreal:

Proceedings and Transactions for the year 1891. Vol. 9. 1892. 4^o.

Geological Survey of Canada in Montreal:

Catalogue of Canadian Plants. Part VI. 1892. 8^o.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1892. Nr. 2. 8^o.

Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 23. Jahrg. Nr. 6—10. 1892. 4^o.

K. technische Hochschule in München:

Bericht über d. J. 1891/92. 4^o.

Programm für die Jahre 1892/93. 8^o.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- u. Schulangelegenheiten in München:

Geognostische Jahreshefte. IV. Jahrg. 1891. Cassel 1892. 4^o.

Die Neuenburgischen Marine-Chronometer beobachtet u. prämiirt auf der Neuenburger Sternwarte. Neuchatel 1892. 4^o.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Série II. Tom. XI. fasc. 25. Paris 1892. 8^o.

Accademia delle scienze fisiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. II. Vol. VI. fasc. 6. 1892. 4^o.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. 10. Bd. 3. Heft. Berlin 1892. 8^o.

Institute of Engineers in Newcastle upon Tyne:

Transactions. Vol. 39. part 3. Vol. 40. part 5. Vol. 41. part 3. 4. 5. 1892. 8^o.

The American Journal in New-Haven:

Journal of Science. 3. Series Vol. 43 Nr. 257—260. Vol. 44 Nr. 261. 262. May—October 1892. 8^o.

Observatory of Yale University in New-Haven:

Report for the year 1891/92. 8^o.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VI. Nr. 1—6. 1891/92. 8^o.

Transactions. Vol. X. Nr. 7. 8. Vol. XI. Nr. 1—5. 1891/92. 8^o.

American Museum of natural History in New-York:

Annual Report for the year 1891. 1892. 8^o.

American Chemical Society in New-York:

Journal. Vol. XIV. Nr. 4—7. 1892. 8^o.

American geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XXIV. Nr. 2. 3. 1892. 8^o.

Naturhistorische Gesellschaft in Nurnberg:

Abhandlungen. IX. Band. 1892. 8^o.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Band XVII. 1. und Mathematische Abtheilung, Band XIV. 1892. 8^o.

Verein für Naturkunde in Offenbach:

29—32. Bericht, 1887—1891. 1892. 8^o.

Radcliffe Observatory in Oxford:

Results of astronomical and meteorological Observations made in the year 1887. 1891. 8^o.

R. Università in Padua:

Relazione letta nell' Aula Magna il 26. Nov. 1892 dal Rettore Prof. Carlo F. Ferraris. 1892. 4^o.

Onoranze centenarie a Galileo Galilei. Discorso del Rettore Magnifico. 1892. fol.

Per il terzo centenario della Inaugurazione di Galileo Galilei nello studio di Padova. 1892. fol.

Circolo metematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VI. fasc. 3. 4. 5. 1892. 4^o.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Annata 15. 1892, Gennaio-Agosto. gr. 8^o. 1892.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1892 Nr. 26—51. 8^o.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 114 Nr. 26. Tom. 115 Nr. 1—25. 1892. 4^o.

Comité international des poids et mesures in Paris:

14. Rapport. 1891. 4^o.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 607—612. Juillet—Décembre 1892. 4^o.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Nouvelles Archives. III. Sér. Tom. 3. 1891. 4^o.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tom. I. fasc. 4. Tom. II. fasc. 1—3. 1890/91. 8^o.

Société de géographie in Paris:

Bulletin. VII. Sér. Tom. 13. 1^{er} 2^d et 3^e Séimestre. 1892. 8^o.

Comptes rendus. 1892 Nr. 12—16. 8^o.

Bulletin. VII. Sér. tom. 13. trimestre 2. 1892. 8^o.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XX. Nr. 3—6. 1892. 8^o.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XVII, Nr. 6. 7. 1892. 8^o.

Mémoires. Tom. V. Nr. 4. 1892. 8^o.

Zeitschrift L'Electricien in Paris:

L'Électricien. 2. Ser. Tom. IV. Nr. 79—104. 1892. 4^o.

Comité géologique in St. Pétersbourg:

Mémoires. Vol. XI. Nr. 2. XIII. Nr. 1. 1891 u. 1892. 4^o.

Bulletins. Vol. IX. Nr. 9. 10. Vol. X. Nr. 1—9. XI. 1—4. et Supplément au Tom. X. 1891—92. 8^o.

Kaiserl. botanischer Garten in St. Petersburg:

Trudy. Tom. XII. Nr. 1. 1892. 8^o.

Russische astronomische Gesellschaft in St. Petersburg:

Iswestija. Heft 1. 1892. gr. 8^o.

Chemisch-physikalische Gesellschaft der k. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXIV. Nr. 5—8. 1892. 8^o.

Kais. russische mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Band XXVIII. 1891. 8^o.

Institut Impérial de médecine expérimentale in St. Petersburg:

Archives des sciences biologiques. Tom. I. Nr. 3. 1892. 4^o.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1892. part. 1. 8^o.

Alumni Association of the Philadelphia College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 29 Nr. 2. 1892. 8^o.

Pennsylvania Geological Survey in Philadelphia:

Atlas: Southern Anthracite Field. Part IV. B. V. VI. 1892. 8^o.

American philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. XXX. Nr. 137. 138. 1892. 8^o.

Transactions. N. S. Vol. XVII. part 1. 2. 1892. 4^o.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. VIII. pag. 85—156. 1892. 4^o.

Portland Society of natural history in Portland:

The Portland Catalogue of Maine Plants. 2^d ed. 1892. 8^o.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band VII. Theil I. 1892. 4^o.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen und Prag:

Mittheilungen der deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag
Wien 1892. 8^o.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorolog. Beobachtungen im J. 1891. 1892. 4^o.
Astronomische Beobachtungen in den Jahren 1888—1891. Appendix
zum 49—52. Jahrg. 1893. 4^o.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Casopis. Tom. XXI. Heft 5. 6. 1892. 8^o.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. Heft 3, 1890/91. 1892. 8^o.

Naturforscher Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. XXXV. 1892. 8^o.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Ser. V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. I. 1. Sem.
fasc. 11. 12. 2. Sem. fasc. 1—10. 4^o.
Atti. Serie IV. Memorie della classe di scienze fisiche. Vol. VI.
1890. 4^o.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 44 sessione VI. VII. Anno 45 sessione I. II. 1891/92. 4^o.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1892. Nr. 2. 8^o.

Specola Vaticana in Rom:

Pubblicazioni. Fasc. II. 1891. 4^o.

Ufficio centrale meteorologico Italiano in Rom:

Annali. Vol. X. parte I—IV. 1892. 4^o.
Annali. Vol. XI. parte 3. 1889. 1892. fol.

Academy of science in St. Louis:

Transactions. Vol. V. Nr. 3. 4. Vol. VI. Nr. 1. 1892. 8^o.

American Association for the Advancement of Science in Salem:

Proceedings. 40th Meeting. 1892. 8^o.

Société Scientifique du Chili in Santiago:

Actes. Tom. II. livr. 1. 2. 1892. 4^o.

Deutscher wissenschaftlicher Verein in Santiago (Chile):

Verhandlungen. Band II. Heft 4. 1892. 8^o.

Department of Mines and Agriculture in Sidney:

Annual Report for the year 1891. 1892. fol.
Palaeontology. Nr. 5. 1892. fol.

Museum in Strassburg:

Aarsberetning for 1891. 1892. 8°.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin. Tom. XXVI. fasc. 7. 8. 9. 1892. 8°.

Geological Survey of New South Wales in Sydney:

Records. Vol. III. part. 1. 1892. 4°.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico).

Boletin. Tom. I. Nr. 10—12. 1892. 4°.

Anuario XIII. Año 1893. 1892. 8°.

Royal Society in Tasmania:

Papers and Proceedings for 1891. 1892. 8°.

College of Science, Imperial University. Tokyo. Japan:

Journal. Vol. V. part. 2. 1892. 4°.

The Calendar for the year 1890/91 and 1891/92. 1891. 92. 8°.

Medicinische Fakultät der Universität Tokio:

Mittheilungen. Bd. I. Nr. 5. 1892. 4°.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. II. part. 2. 1892. 8°.

Società adriatica di Scienze naturali in Trieste:

Bollettino. Vol. XIII. parte 1. 2. 1891—92. 8°.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazione meteorologiche dell' anno 1891. 1892. 8°.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek. Jaargang 32. Deel 2. 1891.
Jaarg. 43. 1891. 1892. 4°.

Physiologisches Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht

Onderzoekingen. IV. Reeks. Deel II. Stuk 1. 1892. 8°.

Smithsonian Institution in Washington:

Report 1889—1890. 1891. 8°.

Contributions to knowledge. Vol. XXXVIII. 1892. 4°.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report of the Superintendent for the year 1890—91. 8°.

Observations during the year 1888. 1892. 4°.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. XI. 1892. 8^o.

U. S. Coast and geodetic Survey Office in Washington:

Report during the year ending June 1890. 1892. 4^o.

Bulletin. Nr. 25. 1892. 4^o.

U. S. Geological Survey in Washington:

Mineral Resources of the United States for 1889—90. 1892. 8^o.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen 1892 Nr. 6—10. 4^o.

Jahrbuch. Band 42 Heft 1. 1892. 4^o.

Abhandlungen. Band XVII, Nr. 2. 1892. fol.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Band XXXV. 1890. 1892. 4^o.

K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1892 Nr. 26—38. 40—45. 47—49.
51. 52. 4^o.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mitteilungen. Band XXII. Heft 3—5. 1892. 4^o.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 42. I. u. II. Quartal. 1892. 8^o.

K. K. öster. Gradmessungs-Kommission in Wien:

Astronomische Arbeiten. Bd. III. Längenbestimmungen. 1891. 4^o.

Verhandlungen über die am 21. April u. 2. September abgehaltenen
Sitzungen. 1892. 8^o.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band VII. Nr. 3. 1892. gr. 8^o.

v. Kuffner'sche Sternwarte in Wien:

Publikationen. Band II. 1892. 4^o.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. 45. Jahrgang. 1892. 8^o.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Sitzungsberichte. N. F. Band XXVII. Nr. 4. 5. 1892. 8^o.

Sitzungsberichte. Jahrg. 1892. Nr. 4—6. 8^o.

*Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens
in Yokohama:*

Mittheilungen. Heft 48—50. 1892. 4^o. Band V. Supplem.-Heft 2. 3.
1892. fol.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

5. Jahresbericht. 1891. 1892. 8^o.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 37. Jahrg. Heft 1. 2. 1892. 8^o.

Generalregister der Publikationen. 1892. 8^o.

--

Von folgenden Privatpersonen:

S. H. Albert I. Fürst von Monaco:

Résultats des Campagnes scientifiques. Fasc. II. 1892. 4^o.

Lucien Anspach in Brüssel:

Le rôle de l'eau dans les cylindres à vapeur. Liège (1892). 8^o.

Julius Bergbohm in Wien:

Entwurf einer neuen Integralrechnung. Leipzig 1892. 8^o.

Giovanni Capellini in Bologna:

Res Ligustiche XX. Gerolamo Guidoni di Vernazza e le sue scoperte geologiche. Genova 1892. 8^o.

I. tronchi di Bennettite dei Musei Italiani. 1892. 4^o.

Édouard Jannetaz in Paris:

Nouvelles recherches sur la propagation de la chaleur dans les corps cristallisés. Paris 1892. 8^o.

Notice sur les travaux scientifiques de M. Édouard Jannetaz. 1892. 4^o.

A. Kurz in Augsburg:

Beiträge zur geometrischen Optik. Berlin 1892. 4^o.

Probleme der elastischen Biegung. s. l. 1892. 8^o.

Theorie und Versuche über hydraulischen Druck (Sonderabdruck 1892. 8^o).

Die Central- und Momentan-Achse. 1892. (Ausschnitt.)

Émile Lemoine in Paris:

5 Broschüren. mathematischen Inhalts (Sep.-Abdr.). 1891/92 8^o.

Alexander Macfarlane in Austin, Texas:

Principles of the Algebra of Physics. Salem 1891. 8^o.

On exact Analysis as the basis of language. 1892. 8^o.

G. Omboni in Padua:

Achille de Zigno, cenni biografici. Padova 1892. 8^o.

Friedrich Prym in Würzburg:

Ueber orthogonale etc. Substitutionen. Göttingen 1892. 4^o.
Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen von
A. Krazer und F. Prym. Leipzig 1892. 4^o.

M. Rajna in Mailand:

Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano. 1892. 8^o.

Dr. Saint-Lager in Lyon:

La priorité des noms des plantes. Paris 1890. 8^o.
Considérations sur le polymorphisme de quelques espèces du genre
Bupleurum. Paris 1891. 8^o.

Michele Stossich in Triest:

I distomi degli uccelli. 1892. 8^o.
Nuova Serie di elminti veneti. Zagreb 1891. 8^o.
I distomi dei mammiferi. 1892. 8^o.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. Nr. LXXX. 1892. 8^o.

de Quatrefages de Bréan, Jean Louis Armand (Nekrolog) 207.

Radlkofer Ludwig 328.

Rauff Gustav 1.

Römer Ferdinand (Nekrolog) 201.

Rollett Alexander (Wahl) 367.

Rüdinger Nikolaus 210.

Sohncke Leonhard 359.

Stas Jean Servais (Nekrolog) 200.

Therese, Königl. Hoheit, Prinzessin von Bayern (Wahl) 365.

v. Voit Karl 21. 196.

Voss Aurel 247.

Weber Wilhelm (Nekrolog) 199.

v. Zittel Karl Alfred 1.

Sach - Register.

Benzolcarbonsäure. Reduktion derselben 21.

Brennerbad, warme Quelle desselben 139.

Curvensystem, durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 2 Variabeln definirt 101.

Dihydrobenzol, Synthese desselben 279.

Dihydroparaxylol, Synthese desselben 307.

Druckschriften, eingelaufene 309. 377.

Fläche, Bestimmung derselben durch geodätische Messungen 27.

Flächentheorie, Fundamentalgleichungen derselben 247.

Formen binäre, Darstellung derselben als Potenzsummen 3.

Gleichgewicht der lebendigen Kraft 329.

Hämoglobingehalt des Blutes, beeinflusst durch die Nahrung 21.

Katalog der anthropologischen Sammlung der hiesigen anatomischen Anstalt 210.

Krystalle, Auflösung und Wachsthum derselben 303.

Linien äquipotentiale in durchströmten Platten 371.

Luftfahrten des Münchener Vereins für Luftschiffahrt 259.

Magnetismus des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen 71.

Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen 279.

YSA 991 0907MA73

Fig. 1.

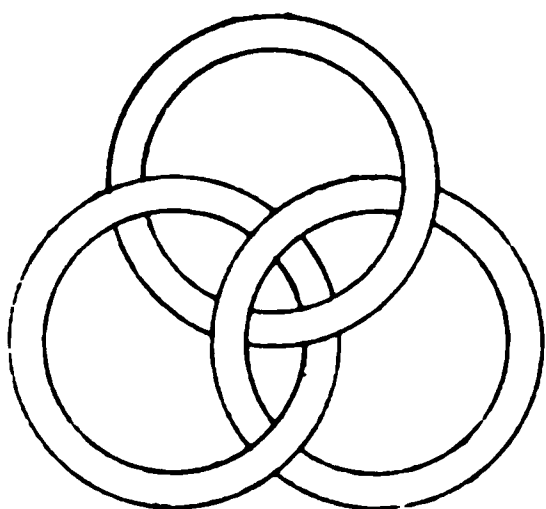


Fig. 2.

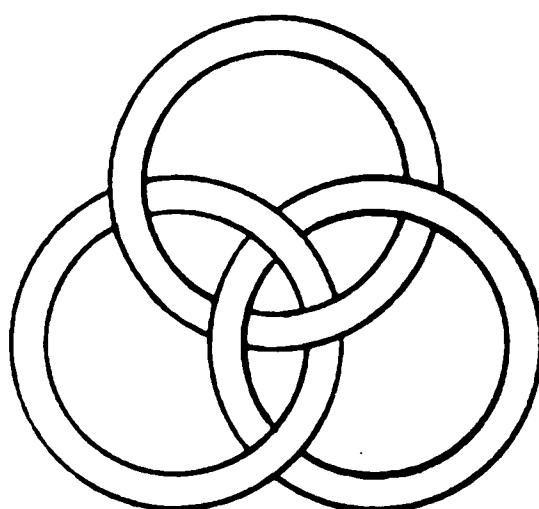
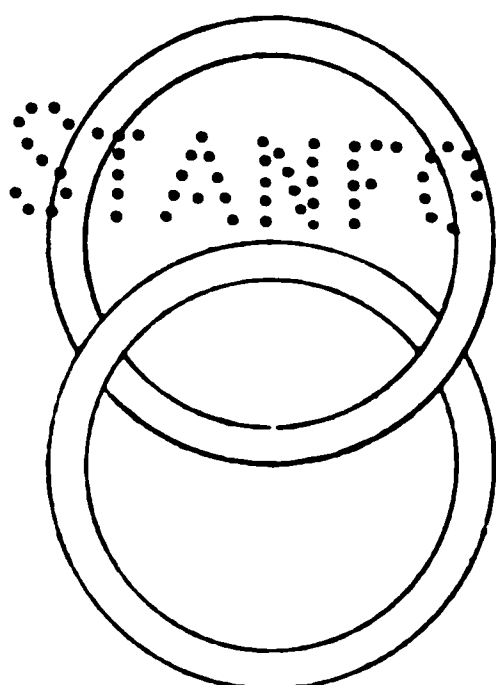


Fig. 3.



UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

Fig. 4.

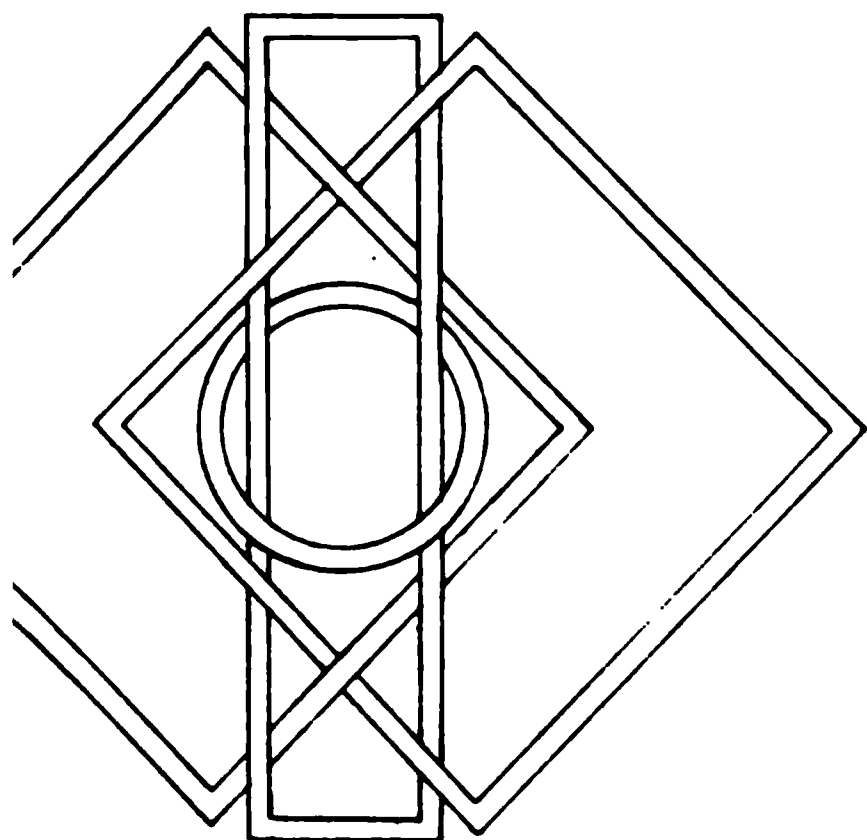
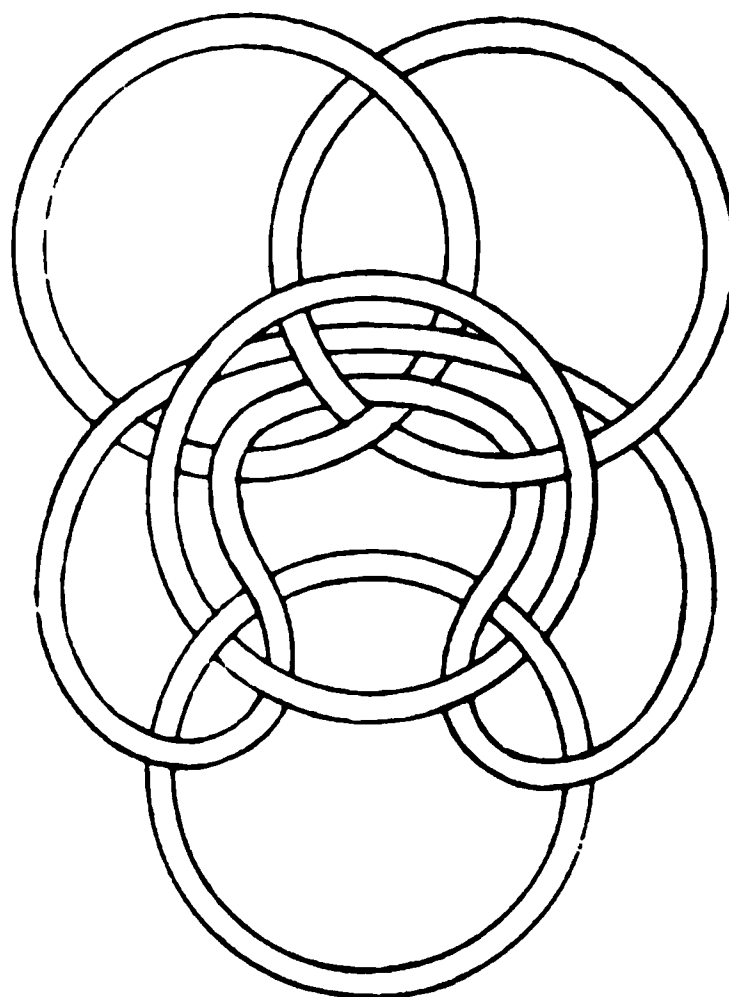
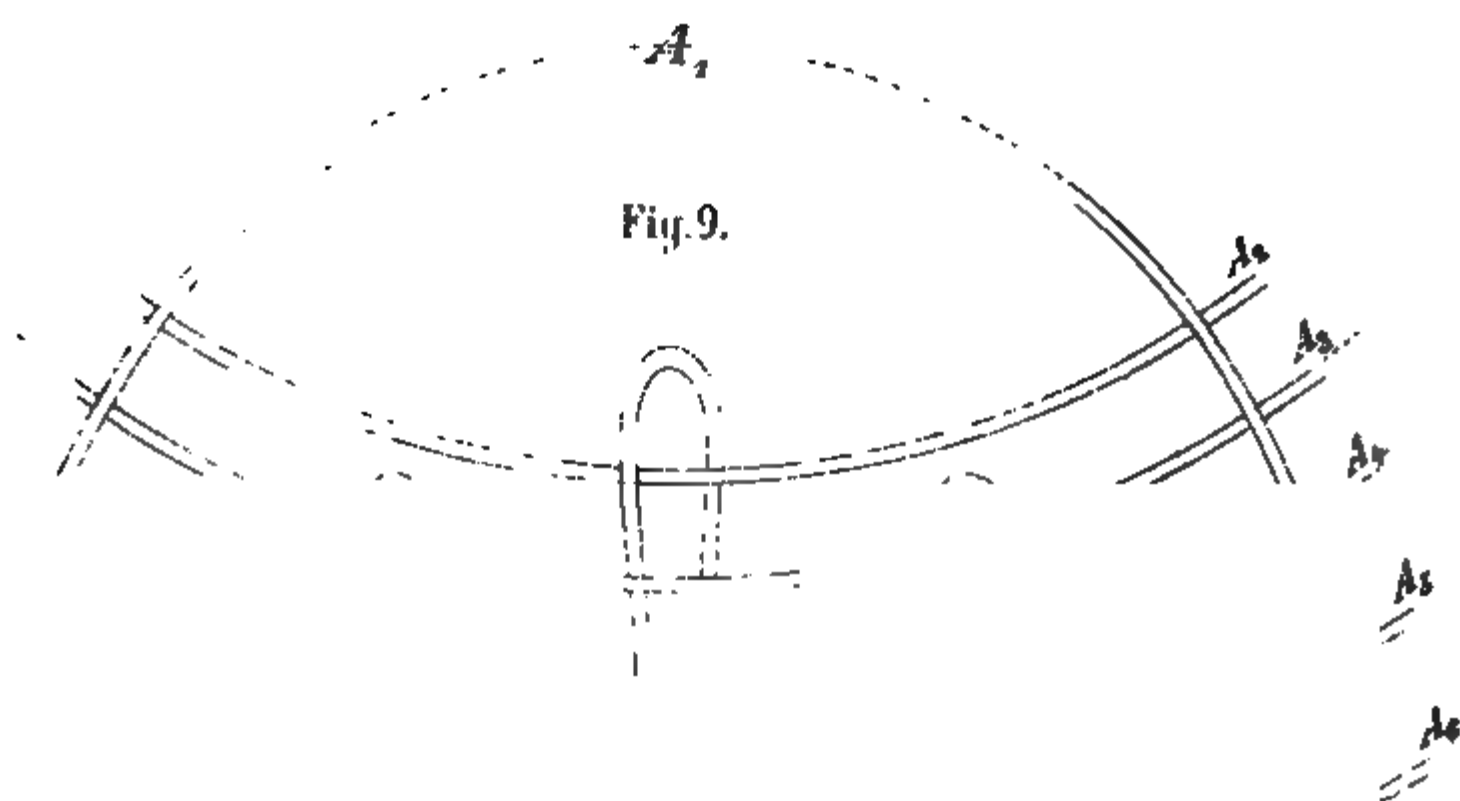
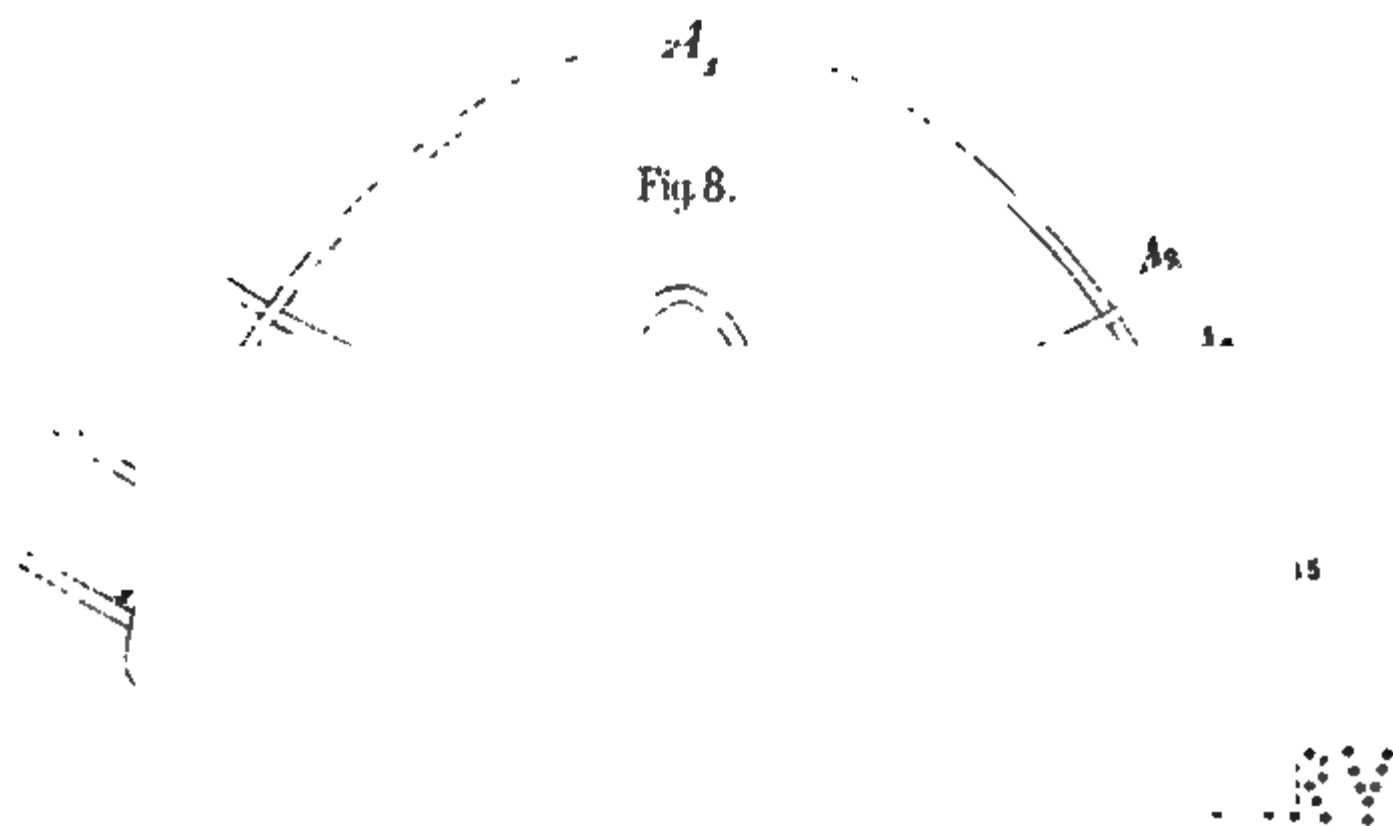


Fig. 5.



•





YWA 9811 08071412

Fig. 6.

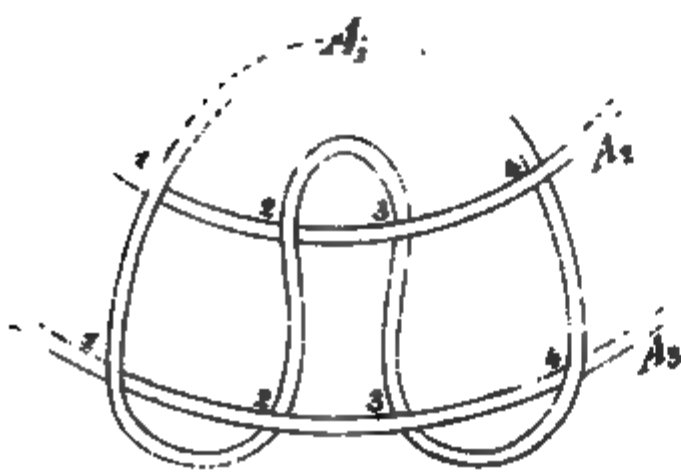


Fig. 7.

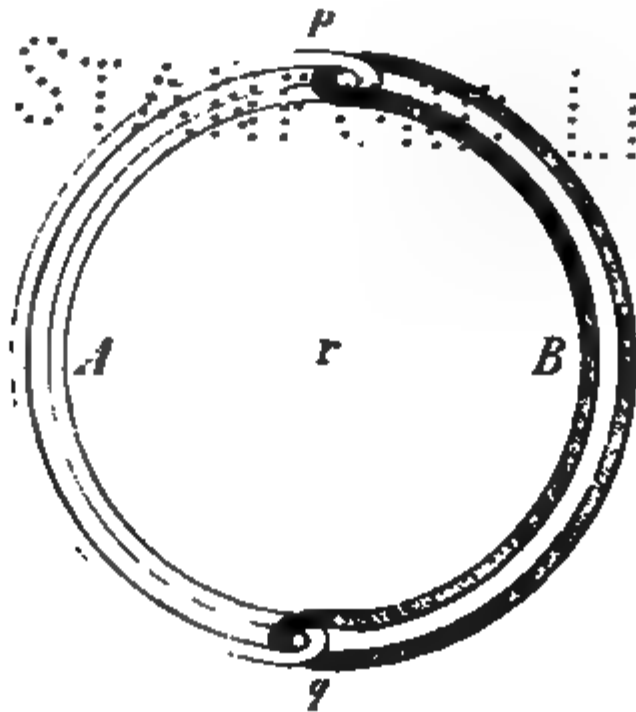


Fig. 10.

Fig. 11.



1941 0400

Fig. 6.

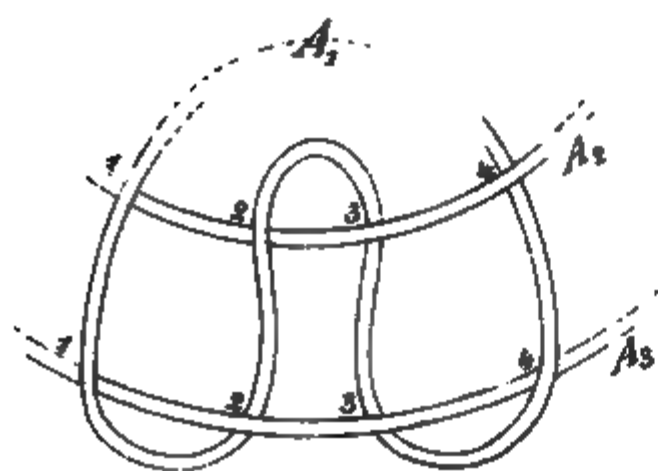


Fig. 7.

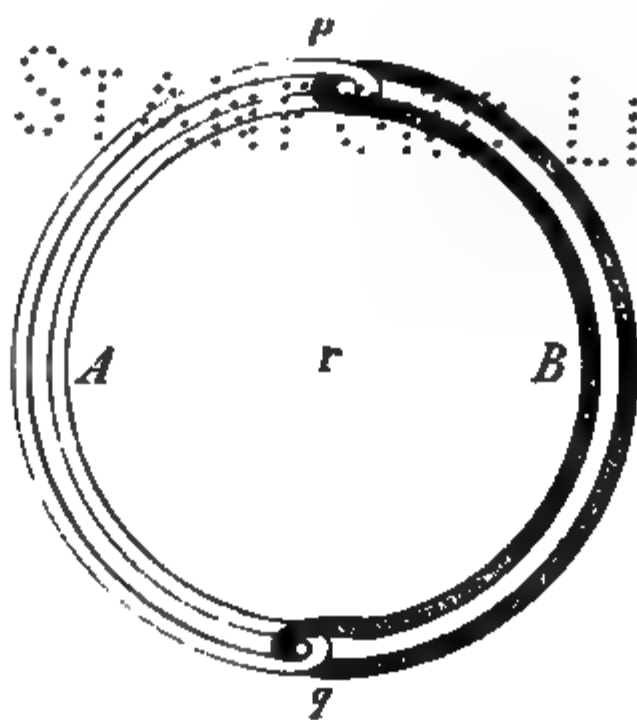
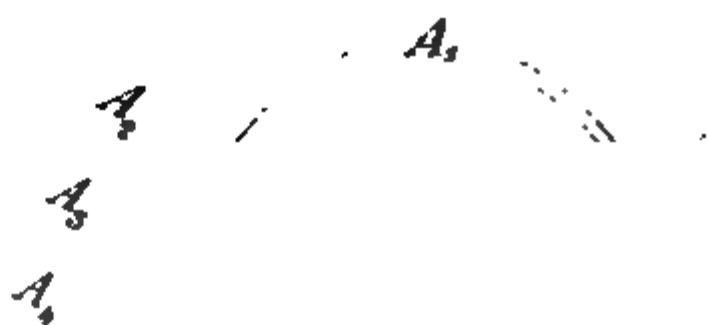


Fig 10.

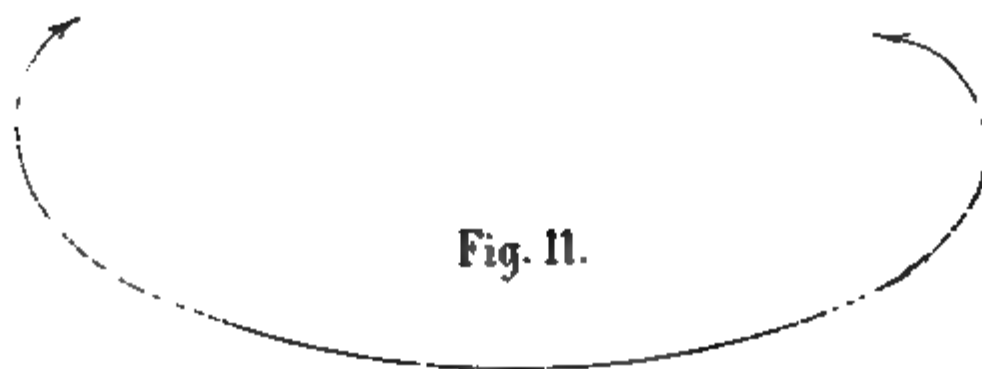
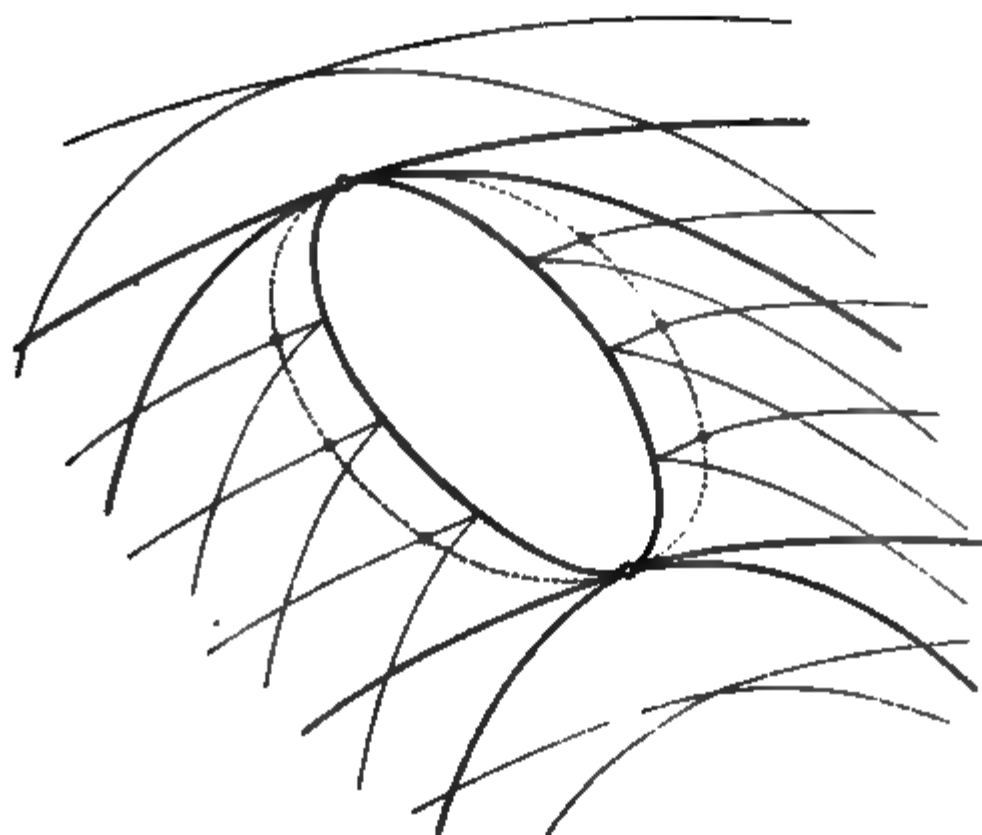


Fig. 11.



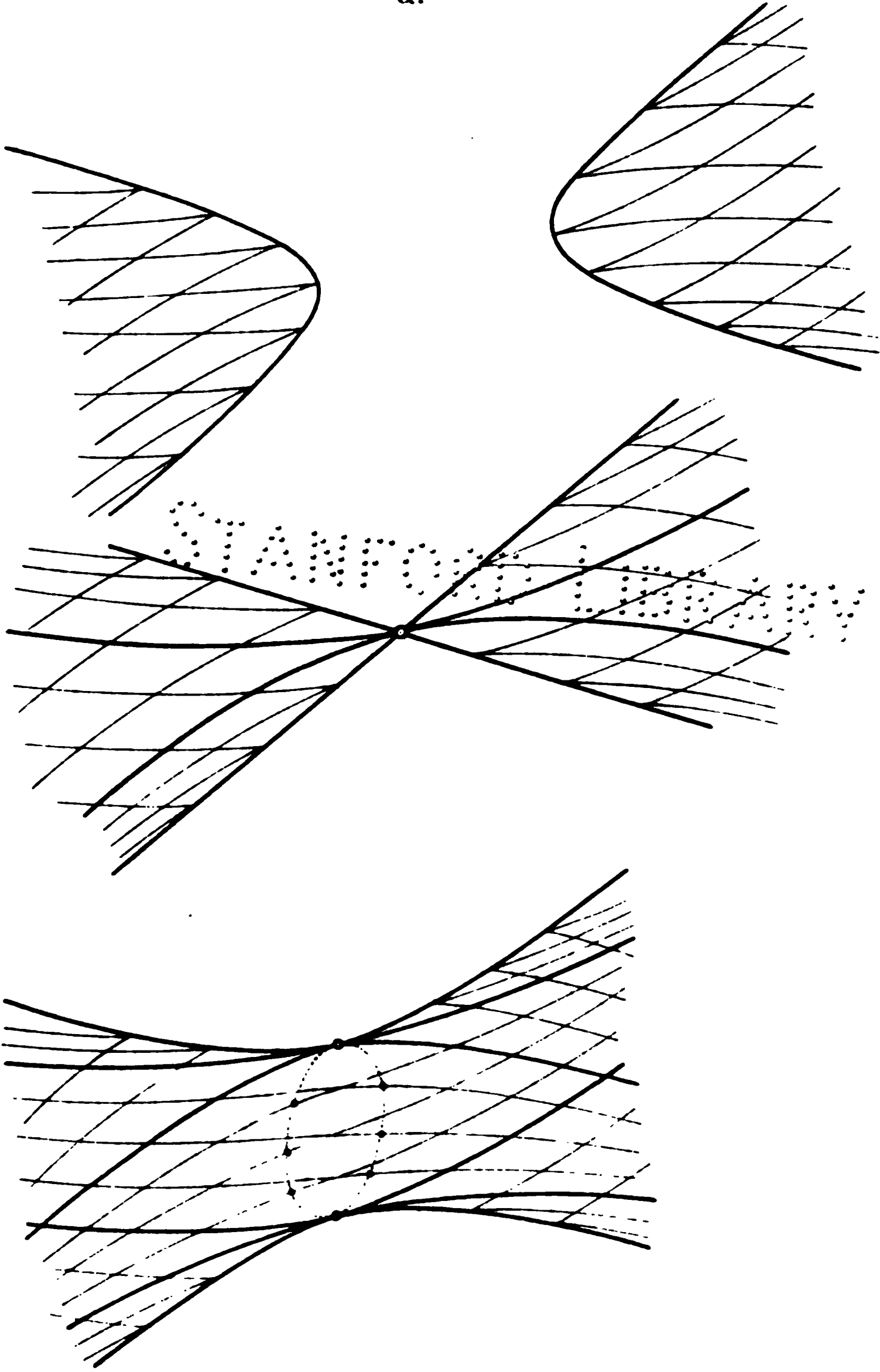
c.

W. D. V.





d.



WASAL OORHARTO



2000

